

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XI.

**I. *Magnetische Untersuchungen;*
*von Felix Auerbach.***

Erste Abhandlung: Ueber den temporären Magnetismus.

Einleitung. Der Einfluss der Grösse und der Gestalt, der Masse und der inneren Beschaffenheit magnetisirbarer Körper auf den temporären Magnetismus, welchen dieselben unter der Einwirkung einer äusseren Kraft annehmen, ist nach den zahlreichen, darüber vorliegenden Untersuchungen ein sehr verwickelter. Es hat das, wie man zu sagen pflegt, seinen Grund in dem Umstande, dass die Vertheilung des Magnetismus in solchen Körpern eine ungleichförmige ist. Geht man aber näher hierauf ein, so sieht man, dass auch die ungleichförmige Vertheilung, sei es nun, dass dieselbe als eine Vertheilung zweier Fluida oder als eine Richtungsvertheilung drehbarer Molecularmagnete gedacht wird, nur eine Folge der Begrenztheit des Körpers ist. Man wird also richtiger sagen, sowohl die Grösse des temporären Magnetismus als auch die Art seiner Vertheilung sind eine Folge der geometrischen und physikalischen Verhältnisse des Magnetisirungskörpers. Die Schwierigkeit liegt nur darin, die verschiedenen Einflüsse dieser Art, also, wenn es sich etwa um Körper von der Gestalt eines Kreiscylinders handelt, die Einflüsse der Länge, der Dicke, der Masse, der Dichtigkeit u. s. w. voneinander zu trennen; gerade hierauf ist bisher nicht genügend Bedacht genommen worden. Auf directem Wege ist diese Trennung überhaupt nicht erreichbar; zwei Stäbe z. B., welche bei gleicher Länge verschiedene Dicke haben, haben entweder verschiedene Masse oder verschiedene Dichtigkeit. Es ist daher erforderlich, durch paar-

weise Combination je zweier Einflüsse indirect dieselben zu ermitteln.

Demgemäss habe ich mir im Folgenden zunächst die Aufgabe gestellt, zu ermitteln, welchen Einfluss eine jede der Grössen: Masse, Länge, Dicke, Dichtigkeit, chemische Natur, auf den temporären Magnetismus ausüben würde, wenn die übrigen constant wären. Es ist klar, dass in Bezug auf eine dieser Grössen eine willkürliche Festsetzung des Einflusses gestattet ist; es soll im Folgenden festgesetzt werden: der Magnetismus ist der Masse proportional; alle scheinbaren Abweichungen von diesem Satze müssen und können dann auf Rechnung der übrigen Grössen gesetzt werden. Im ersten Abschnitte betrachte ich dann zunächst die Einflüsse von Länge und Dicke, indem ich mich dabei auf die zahlreichen bereits vorliegenden Angaben stütze. Ein interessanter Satz ist das allgemeinste Resultat dieser Betrachtung. Weniger befriedigend ist das, was man über den Einfluss der Dichtigkeit weiss; die Angaben, welche ich hierüber im zweiten Abschnitte machen werde, sind höchst schwankend und einander widersprechend. Ich habe daher ausgedehnte Versuchsreihen, besonders mit Metallpulvern, angestellt, deren Besprechung die zweite Hälfte dieses Abschnittes gewidmet ist; ausser Eisen wird dabei auch Nickel in Betracht gezogen. Damit ist die Grundlage für die theoretischen Betrachtungen des dritten Abschnittes wenigstens theilweise gewonnen; das Weitere muss aus den Erscheinungen des remanenten Magnetismus, der magnetischen Nachwirkung und den Beziehungen des Magnetismus zur Bewegung und zur Wärme geschöpft, und darum späterer Mittheilung vorbehalten werden.

1) Einfluss der Länge und Dicke.

Was zunächst den Einfluss der Länge cylindrischer Stäbe auf ihren temporären Magnetismus betrifft, so ist derselbe nach dem Obigen nur aus Versuchen zu ermitteln, bei welchen alle übrigen Einflüsse, abgesehen von demjenigen der Masse, ausgeschlossen sind. Bei den zahlreichen vorliegenden Versuchen ist das nicht streng der Fall. Zwar wurde die Dicke stets

constant gehalten; aber erstens scheint die Constanz der Dichtigkeiten nicht immer festgestellt worden zu sein, und zweitens kann auch eine constante Dicke einen Einfluss auf die Beziehung zwischen Länge und Magnetismus ausüben. Nach den Ergebnissen der Versuche ist das letztere hauptsächlich der Fall. Um diesen Uebelstand zu beseitigen, müsste man entweder mit sehr dicken oder sehr dünnen Stäben operiren, bei welchen der Einfluss der Endlichkeit der Dicke verschwindet, oder, da dies Nachtheile anderer Art im Gefolge haben würde, aus zahlreichen, bei verschiedenen Dicken angestellten Versuchsreihen durch Extrapolation die Beziehung zwischen Länge und Magnetismus berechnen, welche bei unendlicher, d. h. einflussloser Dicke stattfinden würde. Dazu kommt noch ein zweites Bedenken, welches sich auf die Constanz der magnetisirenden Kraft bezieht. Zur Erzielung vergleichbarer Resultate ist dieselbe durchaus erforderlich; um sie zu erreichen, genügt es aber nicht, wie dies meist geschehen ist, stets dieselbe Stromstärke und dieselbe Spirale anzuwenden; man muss vielmehr, je nachdem der untersuchte Stab kürzer oder länger ist, entweder die Stromstärke oder die Spirale ändern; auch darauf, dass die letztere stets länger sein muss, als der Stab, ist nicht immer geachtet worden. Endlich entsteht eine wesentliche Fehlerquelle bei diesen Versuchen durch die verschiedene Entfernung der zu vergleichenden Stäbe von dem Apparate, durch welchen der inducirte Magnetismus gemessen wird. Wie dem abzuhelpen sei, darauf werde ich weiter unten zurückkommen.

Inzwischen muss es genügen, näherungsweise den Einfluss der Länge auf den Magnetismus festzustellen. Dazu können die Versuche von Lenz und Jacobi, Dub und anderen¹⁾ dienen. Aus den ersteren z. B. folgt, dass der Magnetismus einer zwischen 2 und $\frac{1}{2}$ gelegenen Potenz der Länge proportional ist; dabei ist die Dicke $d = 1\frac{1}{4}$ Zoll und die Masse vermuthlich mit der Länge l proportional. Am besten scheint mir in den meisten Fällen die Formel $m \sim l^{\frac{1}{2}}$ die Beobachtungen darzustellen, wie z. B. folgende Tabelle zeigt,

1) Vgl. G. Wiedemann, Galv. (2) 2. p. 446.

welche einige Versuche von Dub¹⁾ darstellt, und in welcher ausser der Länge $2l$ der Stäbe die Quotienten angegeben sind, welche man erhält, wenn man den Magnetismus m dividirt 1) durch l^2 , 2) durch $l^2\sqrt{l}$, 3) durch $l^2\sqrt[3]{l}$.

Tabelle 1.

$2l$	$c \frac{m}{l^2}$	$c \frac{m}{l^2\sqrt{l}}$	$c \frac{m}{l^2\sqrt[3]{l}}$
6"	100	100	100
12	119	84	95
18	132	76,5	92
24	130?	65,3?	82?

Das wesentliche Ergebniss ist, dass für den Magnetismus gleich dicker und dichter, aber verschieden langer Stäbe die Proportionalität: $[m \sim l^{2+k}]$

gilt, in welcher $0 < k < \frac{1}{2}$ ist. Diese Formel stellt aber, weil die Masse P der Stäbe nach der Formel $P \sim l$ variirte, noch nicht den reinen Einfluss der Länge dar; man muss vielmehr beiderseits durch l dividiren und erhält definitiv²⁾:

$$(1) \quad \mu \sim l^{1+k}.$$

Ganz analog verhält es sich mit dem Einflusse der Dicke. Auch dieser Einfluss ist, je nach der Länge der benutzten Stäbe, ein etwas schwankender; am besten scheint mir hier die Potenz $\frac{2}{3}$ der Dicke die Beobachtungen darzustellen; so ergeben die Versuche von v. Waltenhofen³⁾ mit Stäben von 103 mm Länge die folgenden Zahlen:

Tabelle 2.

d (mm)	1,108	2,071	3,015	5,978	11,823	19,824	28,292
$\frac{M}{d}$	0,660	0,530	0,455	0,380	0,277	0,248	0,228
$\frac{M}{\sqrt{d}}$	0,695	0,763	0,790	0,928	0,951	1,106	1,213
$\frac{M}{d^{\frac{2}{3}}}$	0,683	0,676	0,657	0,689	0,631	0,608	0,695

1) Dub, Pogg. Ann. **102**. p. 208. 1857.

2) Unter μ soll stets der Magnetismus, reducirt auf gleiche übrige Umstände, verstanden werden.

3) v. Waltenhofen, Wien. Ber. **52**. p. 87. 1865.

Während hier $\frac{M}{d}$ mit wachsendem d abnimmt, $\frac{M}{\sqrt{d}}$ zunimmt, bleibt $\frac{M}{d^{\frac{3}{2}}}$ im Durchschnitt constant. Ferner fand Wiedemann¹⁾ bei einer Länge von 250 mm folgende entsprechende Werthe paare:

Tabelle 3.

d (mm)	10,5	20	30	60	90
$c \frac{M}{\sqrt{d}}$	1000	1026	1067	1207	1339
während sich weiter ergibt:					
$c \frac{M}{d^{\frac{3}{2}}}$	1000	924	896	903	936

Werthe, welche ausser dem ersten als constant zu bezeichnen sind. Endlich ergeben die einwurfsfreiesten unter den Versuchen von Lenz und Jacobi²⁾ für $\frac{m}{d}$ abnehmende, für $\frac{m}{\sqrt{d}}$ zunehmende, dagegen für $\frac{m}{d^{\frac{3}{2}}}$ Zahlen, welche, abgesehen von der ersten, für $d = \frac{1}{2}$ Zoll gültigen, im Durchschnitt constant sind.

Es ist jedoch zu beachten, dass alle diese Versuche bei kleinen Längen angestellt worden sind. Bei verschiedenen, zum Theil sehr grossen Längen hat Dub³⁾ den Einfluss der Dicke untersucht; dabei zeigt sich dann, dass zwar für kleine Längen auch hier die Potenz $\frac{3}{2}$ der Dicke, für grössere jedoch die Potenz $\frac{1}{2}$ den Beobachtungen besser genügt. Bezeichnet k' wie k eine Zahl, für welche $0 < k' < \frac{1}{2}$ ist, so kann man jedenfalls sagen, dass die Proportionalität:

$$[m \sim d^{1-k'}]$$

besteht; da hierbei aber ausser d auch noch die Masse μ nach der Formel $\mu \sim d^2$ variirend gedacht werden muss, so

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 117. p. 236. 1862.

2) Lenz u. Jacobi, Pogg. Ann. 47. p. 235. 1839. 61. p. 255. 1844.

3) Dub, Pogg. Ann. 90. p. 250. 1853; 94. p. 580. 1855; 120. p. 573. 1863 u. a. a. O.

folgt als Ausdruck des reinen Einflusses der Dichtigkeit auf den Magnetismus die Formel:

$$(2) \quad \mu \sim d^{-(1+k)}.$$

Der temporäre Magnetismus nimmt also *ceteris paribus* mit der Länge zu, mit zunehmender Dicke dagegen ab. Nach den Formeln (1) und (2) würde überdies sowohl jene Zunahme als auch diese Abnahme für verschiedene Längen, resp. Dicken, eine relativ gleichmässige sein; das ist jedoch nicht genau der Fall; vielmehr zeigen die Versuche ganz deutlich, dass sowohl mit wachsender Länge die Zunahme, als auch mit wachsender Dicke die Abnahme des Magnetismus eine langsamere wird. Setzt man speciell, was der Wahrheit sehr nahe kommt, $k = \frac{1}{2}$, so findet man:

$$(3) \quad \mu \sim \left(\frac{l}{d}\right)^{1+\frac{1}{2}}, \quad 0 < k < \frac{1}{2},$$

in Worten: Der temporäre Magnetismus eines cylindrischen Stabes ist, abgesehen von dem Einflusse der Masse, nur von seiner Gestalt, nicht aber von seiner Grösse abhängig.

Das besprochene Verhalten weicher Magnetisirungskörper legt eine Anschauung nahe, welche bisher nur zur Beschreibung anderer magnetischer Erscheinungen, insbesondere zur Erklärung der Beziehungen zwischen magnetisirender Kraft und erzeugtem Magnetismus benutzt worden ist. Denkt man sich nämlich einen Magnetisirungskörper als ein System magnetischer Molecüle, welche ausser einer äussern Kraft, auch gegenseitigen Einflüssen unterworfen sind, so kommt man nothwendig zu dem Schlusse, dass die der Oberfläche nahe liegenden Theile eines Magnetisirungskörpers sich anders verhalten müssen, als die im Innern gelegenen, weil die Wechselwirkung bei ihnen eine andere sein muss. Es liegt also nahe, den constatirten Einfluss von Länge und Dicke auf einen Einfluss der magnetischen Wechselwirkung der Molecüle zurückzuführen. Ehe dieser Versuch gemacht werden wird, soll seine Berechtigung einer weiteren experimentellen Probe unterworfen werden. Macht sich nämlich die magnetische Wechselwirkung wirklich bei den Erscheinungen

des Magnetismus geltend, so muss sie dies auch thun, wenn man sie künstlich im Innern variiren lässt, es muss also z. B. der temporäre Magnetismus eines Stabes, *ceteris paribus*, von seiner Dichtigkeit abhängen.

2) Versuche über den temporären Magnetismus von Metallpulvern.

a. Frühere Versuche. Da consistente Magnetisirungskörper eine zu geringe Variation der Dichtigkeit gestatten, muss man zur Untersuchung des in Rede stehenden Einflusses Metallpulver anwenden. Schon Coulomb¹⁾ schlug diesen Weg ein. Er mengte Eisenfeilspäne mit Wachs derartig, dass die Entfernungen der Eisentheilchen recht erhebliche waren, und fand, dass in diesem Falle nicht nur die Grösse, sondern auch die Gestalt des Körpers ohne Einfluss auf seinen Magnetismus war. Aus neuerer Zeit liegen Versuche über Metallpulver von Boernstein, von Toepler und v. Ettingshausen²⁾, und von v. Waltenhofen vor. Von diesen Versuchen waren die an zweiter Stelle genannten gelegentliche. Es wurden aus Eisenpulver und Fett Gemische hergestellt, von denen das eine 0,920 g, das andere 0,5644 g Eisen auf je 35 g Fett enthielt. Die Gemische wurden in cylindrische Formen gebracht und durch Kräfte magnetisirt, welche von 1 bis 9 Bunsen'schen Elementen herrührten. Das Verhältniss der in ihnen inducirten temporären Magnetismen ergab sich ziemlich constant gleich 0,571, während das Verhältniss der Eisenmengen gleich 0,613 ist. Hieraus ergibt sich, dass der Magnetismus mit abnehmender Dichtigkeit ebenfalls abnimmt. Könnte man annehmen, dass die Gesamtdichtigkeit der Gemenge dieselbe war (dieselbe hängt beträchtlich von der Art der Füllung ab), so würde 0,613 auch das Verhältniss der Dichtigkeiten des Eisens in den beiden Gemengen sein, und man würde das Resultat erhalten, dass, wenn unter sonst gleichen Umständen, also auch bei gleichen Massen, die Dichtigkeiten sich wie 1:0,613 verhalten, die Magnetismen sich wie

1) Vgl. G. Wiedemann, *Galv.* (2) 2. p. 420.

2) Toepler und v. Ettingshausen, *Pogg. Ann.* 160. p. 1. 1877.

0,613 : 0,571 oder wie 1 : 0,932 verhalten. Der Einfluss der Dichtigkeit wäre hiernach ein ziemlich schwacher.

Für die beiden anderen oben erwähnten Untersuchungen bildete das Verhalten des pulverförmigen Eisens den eigentlichen Gegenstand. Boernstein¹⁾ setzte zu Lösungen der metallischen Salze Alaunlösung hinzu, fällte hieraus die Oxyde im Gemenge mit Thonerde und reducirte schliesslich im Wasserstoffstrome. So gelangte er zu staubförmigen Gemengen von Eisen, Nickel, Kobalt mit Thonerde, welche er nun in Bezug auf ihr magnetisches Verhalten mit analog, aber ohne Zusatz von Alaunlösung erhaltenen reinen Metallpulvern verglich. Zur Bestimmung des Einflusses der Dichtigkeit sind indess von diesen Versuchsreihen nur zwei zu verwenden, weil bei den anderen die Gewichtsverhältnisse nicht angegeben sind. Bei dem einen Versuche verhielten sich die in dem reinen Metallpulver und in dem Gemenge enthaltenen Eisenmengen wie 7:3, und es ergaben sich die durch gleiche äussere Kräfte in gleichen Massen erzeugten Magnetismen, so lange jene klein waren, im Verhältnisse von 73:189, für grössere Kräfte im Verhältnisse von 84:132. An diesen Zahlenverhältnissen muss jedoch, was von Boernstein's Seite nicht geschieht, eine Correction angebracht werden. Die verglichenen Pulver waren nämlich verschieden lang (142 resp. 185 mm), und die Länge l hat nach dem Obigen, unabhängig von der Masse, noch einen Einfluss, der sich durch Gleichung (1) darstellt. Setzt man in ihr $k = \frac{1}{2}$, und dividirt man demgemäss die zweite Verhältnisszahl durch $\left(\frac{185}{142}\right)^{\frac{1}{2}}$, so erhält man als corrigirtes Verhältniss der Magnetismen 1:1,85 für kleine, und 1:1,12 für grosse Kräfte. Das Resultat Boernstein's, dass der Magnetismus mit abnehmender Dichtigkeit zunehme, wird also durch die angebrachte Correction nicht alterirt. Eine Bestätigung hierfür liefert die andere brauchbare Versuchsreihe (Pulver VIII: Eisen, und Pulver IX: Gemenge). Dem ersteren Pulver ent-

1) Boernstein, Ber. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1874. Pogg. Ann. 154. p. 336. 1875.

spricht nämlich eine 1,7 mal so grosse Dichtigkeit und trotzdem (nach Reduction auf gleiche Massen und Längen) nur ein etwas mehr als halb so grosser Magnetismus. Eine ähnliche Vergleichung der für Kobalt- und Nickelpulver geltenden Versuchsreihen (X und XI) würde, unter der Voraussetzung, dass kein erheblicher specifischer Unterschied zwischen den Magnetismen beider Metalle besteht, freilich zu einem ganz anderen Ergebnisse führen. Allein diese Versuche scheinen überhaupt keine allgemeinere Bedeutung zu haben, da die in verschiedenen Fällen für Kobalt und Nickel von Boernstein erhaltenen Zahlen in grellem Widerspruche miteinander stehen (vgl. die Reihen V, VII, X, XI). Es bleibt also dabei, dass nach Boernstein der Magnetismus mit abnehmender Dichtigkeit wächst.

Boernstein hat auch die bei Eisen, Nickel, Kobalt und ihren Gemengen mit Thonerde stattfindenden Beziehungen zwischen der magnetisirenden Kraft und dem erzeugten Magnetismus untersucht. Allein gegen diese Versuche können zwei Einwände erhoben werden; erstens wird auch hier von dem Einflusse der Länge gänzlich abgesehen, sodann aber wird auch auf die Verschiedenheit der absoluten Dichtigkeiten, welche jedenfalls sehr beträchtlich war, keine Rücksicht genommen. Die Berücksichtigung des ersteren Umstandes macht z. B. das Resultat, dass die Magnetisirungscurve des Nickelpulvers diejenige des Kobaltpulvers schneide, hinfällig; letzteres ist vielmehr von Anfang an schwächer magnetisch. Immerhin folgt aus den Versuchen, dass der Magnetismus, besonders für grössere Kräfte, desto langsamer mit der Kraft wächst, je geringere Dichtigkeit das Metall besitzt, und dass Nickel wie verdünntes Eisen, Kobalt wie verdünntes Nickel oder wie stark verdünntes Eisen in magnetischer Hinsicht sich verhält.

Im Einklange mit den Versuchen von Toepler und v. Ettingshausen, und im Widerspruche mit den bezüglichen von Boernstein stehen, was den Hauptpunkt betrifft, die Resultate von v. Waltenhofen.¹⁾ Auch dieser

1) v. Waltenhofen, Wien. Ber. 79. (3) Jan. 1879.

Physiker arbeitete mit chemisch reducirtem, sehr feinem Eisenpulver. Von den Füllungen der beiden Röhren A_1 und C_1 (von der Röhre B_1 möge hier abgesehen werden) war die erstere durch Zusammenklopfen verdichtet, die andere nicht; beide hatten 10 mm Durchmesser, die erstere war 99 mm lang und 7,1503 g schwer, die letztere 97 mm lang und 11,0944 g schwer. Diese Angaben würden miteinander im Widerspruche stehen, insofern das zusammengeklopfte Pulver weniger dicht ist als das andere, wenn nicht die Bemerkung hinzugefügt wäre, dass A_1 abgesiebtes Pulver, B_1 der zerriebene und abgesiebte Rest war. Immerhin bleibt dieser Sachverhalt einigermassen undeutlich. Jede dieser beiden Röhren wurde nun mit einem Stabe aus weichem Eisen von gleicher Länge und nahezu gleicher Masse verglichen. Es wog nämlich der Stab A_3 7,1206 g, der Stab C_3 11,1107 g. Da nun das Pulver A_1 eine Dichtigkeit, $\delta = 0,919$, A_3 dagegen als consistentes Eisen etwa eine solche $\delta = 7,788$ besass, so folgt, dass der Stab im Verhältniss von $\sqrt{\frac{0,919}{7,788}} : 1$ dünner war als das Pulver, d. h. 2,91 mal so dünn; ebenso kann der Durchmesser des Stabes A_3 nur $\frac{1}{2,91}$ von derjenigen des Pulvers C_1 , dessen Dichtigkeit $\delta = 1,456$ war, betragen haben. Aus der von v. Waltenhofen durchgeführten Vergleichung darf daher aus doppeltem Grunde kein Schluss gezogen werden: einmal, weil die Entfernung der Metalltheilchen von der Spirale in beiden Fällen eine verschiedene war, sodann, weil die Dicke, unabhängig von der Masse, einen Einfluss auf den Magnetismus ausübt. Um wenigstens diesen letzteren zu eliminiren, muss man nach Gleichung (2), indem man etwa $k = \frac{1}{2}$ setzt, die für die Stäbe gültigen Zahlen mit $(2,91)^{\frac{1}{2}}$ dividiren, d. h. mit 4,15. Die folgende Tabelle enthält die verschiedenen äusseren Kräften i entsprechenden Verhältnisse der Magnetismen der Metallkörper A_3 und A_1 , zuerst nach v. Waltenhofen's Angabe, sodann mit der von mir angebrachten Correction.

Tabelle 4.

i	10	20	30	40	45
$\frac{A_3}{A_1}$	7,72	6,32	5,94	4,59	4,31
$\frac{A_3'}{A_1}$	1,86	1,52	1,43	1,11	1,04

Entsprechend ergibt sich für das Vergleichspaar C_3 und C_1 , indem $C_3' = \frac{C_3}{(2,31)^{\frac{1}{3}}}$ gesetzt wird:

Tabelle 5.

i	10	20	30	40	45	50
$\frac{C_3}{C_1}$	9,24	8,22	6,35	5,21	5,18	4,90
$\frac{C_3'}{C_1}$	3,03	2,69	2,08	1,71	1,70	1,61

Die angebrachte Correction lässt mithin qualitativ das von v. Waltenhofen gefundene Resultat bestehen, dass der Magnetismus des consistenten Eisens *ceteris paribus* stärker ist als derjenige pulverförmigen Eisens, quantitativ aber wird das Ergebniss infolge jener Correction erheblich modificirt: die Abhängigkeit des Magnetismus von der Consistenz ist bei weitem nicht so stark wie es nach den Zahlen von v. Waltenhofen den Anschein hat. Auch ist Folgendes zu beachten. Der Umstand, dass pulverförmiges Eisen schwächer magnetisch wird als consistentes, lässt erwarten, dass weiter das pulverförmige Eisen desto schwächer magnetisch werde, je weniger dicht es ist. Gerade das Gegentheil ergeben aber die Versuche von v. Waltenhofen. Rechnet man nämlich die für Pulver C_1 gefundenen Magnetismen auf die Länge und Masse des Pulvers A_1 um, indem man mit $\frac{7,1503}{11,0944} \times \left(\frac{99}{97}\right)^{1,33}$ multiplicirt (die Querschnitte sind ohnedies gleich), so erhält man durch graphische Interpolation als Verhältnisse der Magnetismen von C_1 und A_1 , erzeugt durch die Kraft i , folgende Zahlen:

Tabelle 6.

<i>i</i>	10	20	30	40	45
$\left(\frac{C_1}{A_1}\right)$	0,89	0,91	0,94	0,90	0,88

also lauter echte Brüche; das dichtere Pulver C_1 ist also schwächer magnetisch.¹⁾

b. Eigene Versuche. Unter diesen Umständen schien es mir geboten, durch neue Beobachtungen die Frage der Beziehung zwischen Dichtigkeit und Magnetismus wieder aufzunehmen.

Das Material, mit welchem ich arbeitete, war sehr feines, chemisch reducirtes Eisenpulver. Zum Zwecke der Verdünnung wurde es mit sehr feinem Holzpulver gemengt, dessen Magnetismus entweder, wie sich ergab, verschwindend klein war oder bei einigen Versuchsreihen, bei welchen die Empfindlichkeit des Apparates sehr gross war, eliminirt wurde. Die Vermengung wurde zunächst vor der Herstellung der Magnetisirungskörper möglichst sorgfältig gemacht und nach der Füllung in cylindrische Glasröhren wiederholt. Es zeigte sich nämlich einerseits, dass beim Füllen infolge der Wirkung der Schwere die Mischung an Gleichmässigkeit beträchtlich einbüsste; andererseits aber stellte sich heraus, dass diese Gleichmässigkeit ein ganz wesentliches Erforderniss für die Brauchbarkeit der Versuche ist. Eine einfache, auch für das spätere nützliche, theoretische Betrachtung macht dies Verhalten erklärlich. Es soll der Einfluss der Dichtigkeit ermittelt werden; vom Standpunkte der Molecularhypothese aus heisst das: es soll der Einfluss des Molecularabstandes untersucht werden; oder es sollen die Magne-

1) Nach des Hrn. Verfassers gefälliger Privatmittheilung können die von mir an seine Zahlen angeknüpften Betrachtungen deshalb keinen Anspruch auf Genauigkeit machen, weil die Dicke der verglichenen Röhren nur im Durchschnitt 10 mm betrug, während die Abweichungen hiervon auf einige Zehntelmillimeter sich beliefen, und weil der Einfluss der Dicke von der Weite der Spirale abhängt. Das Wesentliche der obigen Schlüsse bleibt aber trotzdem richtig.

tismen der beiden durch die Schemata 1 und 2 dargestellten Körper verglichen werden.

1) Fig. 1.

2) Fig. 2.

Aeussere Gründe gestatten das nicht in genügender Weise; man muss vielmehr, indem man neben consistenten Körpern Pulver benutzt, mit dem Körper 1) den durch das Schema 3 dargestellten Körper vergleichen;

3) Fig. 3.

d. h. mit einem Körper, dessen Molecularabstand nicht absolut, sondern nur im Durchschnitt constant ist. Es ist ein Fall denkbar, in welchem die für 3) erhaltenen Resultate unmittelbar und ungeändert auf 2) übertragen werden dürfen; es ist dies der Fall, wenn sich herausstellen sollte, dass zwischen dem Molecularabstande und dem Magnetismus eine lineare Beziehung besteht. Es wird sich zeigen, dass dies nicht der Wirklichkeit entspricht. In allen anderen Fällen darf man die Ergebnisse für Pulver nicht auf Molecularsysteme übertragen. Wenn aber (und das ist, wie sich ergeben wird, der Fall) die Abhängigkeit des Magnetismus vom Molecularabstande eine stärkere ist, als sie nach dem linearen Gesetze sein würde, so ist wenigstens der Schluss zu ziehen, dass das für ein Pulver (3) gefundene Ergebniss zwischen dem für (1) erhaltenen und demjenigen liegen muss, welches bei gleichem mittleren Molecularabstande wie bei (3) für (2) gefunden werden würde. Die ganze Betrachtung setzt aber eins voraus: dass schon in sehr kleinen Theilen der untersuchten Pulver die mittlere Dichtigkeit dieselbe sei. Deshalb eben ist es erforderlich, einmal die Mischung des magnetischen mit dem nichtmagnetischen Bestandtheile möglichst gleichmässig zu machen, und sodann die Gesamtdichtigkeit der Mischung selbst nicht zu gering zu machen. Ich vermute, dass der erstere Umstand in Bezug auf Boernstein's, der zweite, in Bezug auf v. Waltenhofen's Resultate nicht ohne Einfluss gewesen sei.

Boernstein hat noch eine andere Rücksicht ausser Acht gelassen, welche auch ich anfangs glaubte nicht nehmen

zu müssen. Ich legte anfangs kein Gewicht darauf, den zu vergleichenden Pulvern genau die gleiche Länge zu geben, weil ich meinte, es werde genügen, die durch die Formel (1) angegebene Correction anzubringen. Es ist jedoch zu bedenken, dass die Wirkung verschieden langer Körper auf den Messapparat (bei Boernstein ein Magnetspiegel) eine verschiedene ist, selbst wenn die Mitten der Körper gleichen Abstand von jenem haben. Es rührt dies daher, dass die magnetische Fernwirkung mit einer höheren als der ersten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist. Infolge dessen muss z. B. in den Figuren 1 u. 2 Taf. IV die Wirkung des Stabes *AB*, reducirt auf die Masse und Dimensionen des Stabes *CD*, eine grössere sein als diejenige des Stabes *CD*. Bei Boernstein musste daher die Wirkung des Pulvers II (l. c. p. 338) *ceteris paribus* grösser ausfallen als diejenige des Pulvers III; ein Einfluss, welcher bei der grossen Nähe des Apparates und der grossen Längendifferenz der Pulver (ca. 30 Proc.) sich sehr bedeutend und zwar in dem Sinne geäussert haben muss, dass der Magnetismus von II im Vergleich zu dem von III zu gross erscheint. Um diese Fehlerquelle zu beseitigen, muss man entweder gleich lange Pulver benutzen oder bei verschiedenen langen Pulvern nicht dem Mittelpunkte eine constante Entfernung vom Messapparate geben, d. h. nicht dem Punkte, für welchen r_0 der Mittelwerth aller Werthe r ist (r gleich Entfernung der Pulvertheilchen vom Messapparate), sondern demjenigen Punkte, für welchen $\frac{1}{r_0^3}$ der Mittelwerth aller Werthe $\frac{1}{r^3}$ ist. Ich habe meist den ersten Weg eingeschlagen.

Ferner habe ich den zu vergleichenden Pulvern stets die gleiche Dicke gegeben, um die Dickencorrection (Formel 2) vermeiden und ferner die magnetisirende Kraft als gleich ansehen zu dürfen; bei den verschiedenen Versuchsreihen war diese Dicke verschieden; es scheinen mir aber die Ergebnisse derjenigen Versuche am zuverlässigsten, bei welchen die magnetisirende Spirale die Röhren dicht umschloss.

Bezüglich der von der üblichen wenig abweichenden Versuchsmethode kann ich mich kurz fassen. Die die Pulver enthaltenden Glasröhren wurden in die Magnetisirungsspirale so eingeschoben, dass die Mittelpunkte von Pulver und Spirale zusammenfielen. Die Spirale selbst enthielt fünf Lagen 1,78 mm dicken Kupferdrahtes, jede zu 53 Windungen; der Durchmesser der innersten Lage mass 20 mm, derjenige der äussersten 41 mm; die Länge der Spirale betrug 127 mm; ihre Richtung fiel mit der Ostwest-Richtung zusammen.

In einer bei den verschiedenen Versuchsreihen verschiedenen Entfernung von ihr, je nach der erfordernten Empfindlichkeit, hing westlich eine Magnetnadel, deren Mittelpunkt in Verlängerung der Spiralenaxe fiel, und deren Ablenkungen mit Spiegel, Fernrohr und Scala beobachtet wurden. Die Ablenkungen rührten fast ausschliesslich vom Magnetismus der Pulver her; da die Stromwirkung durch passende Fortführung der Stromleitung im Westen der Magnetnadel bei Beginn jeder Versuchsreihe auf Null gebracht wurde und während der Dauer einer Reihe nur um sehr geringe, in Rücksicht gezogene Beträge von diesem Werthe sich entfernte. Auch die magnetische Wirkung von Glas, Stöpsel und Holz wurde nicht ausser Acht gelassen; sie war meist verschwindend klein. Der Strom ging noch durch eine Siemens'sche Widerstandsscala und durch ein Wiedemann'sches Galvanometer, dessen dickste Rollen weit von dem Magnetspiegel entfernt und so verbunden waren, dass nur die Differenz der Wirkungen zur Geltung kam. Sowohl der Magnetismus als die magnetisirende Kraft wurden den Tangenten der bezüglichen Ablenkungswinkel proportional gesetzt; dies Verfahren rechtfertigte sich in beiden Fällen durch die zwischen der Grösse der schwingenden Magnete und der Grösse ihrer Drehung stattfindenden numerischen Beziehungen. Bei sehr starken Magnetisirungen übte der Magnetismus einen sehr kleinen, directen Einfluss auf die Galvanometernadel aus, derselbe liess sich aber leicht ermitteln und eliminiren. Erzeugt wurde der Strom durch 1 bis 5 Bunsen'sche Elemente.

Grosse Meinungsverschiedenheit herrscht unter den Be-

obachtern in Bezug auf das zweckmässigste Verfahren bei der Reihenfolge der Manipulationen. Während die einen behaupten, ein klares Bild der Erscheinungen sei nur zu gewinnen, wenn man, während der Magnetisirungskörper in der Spirale sich befindet, den Strom weder schliesse, noch öffne, ja überhaupt weder verstärke noch schwäche, meinen die anderen, man müsse den Stab während der ganzen Versuchsreihe, einschliesslich des ersten Schliessens und des letzten Oeffnens, in der Spirale liegen lassen. Ich habe stets das letztere Verfahren angewendet; übrigens gab das gelegentlich benutzte andere Verfahren nur da verschiedene Resultate, wo es sich um die Magnetisirung durch verschiedene ansteigende Kräfte handelte.

Aus den Versuchsergebnissen wähle ich einige aus, welche von den oben angeführten Fehlern am freiesten sind. Die Tabellen enthalten die Nummer, die Länge l und die Dicke d der Pulver in Millimetern, ihren Gehalt an Eisen Pc , dessen Gewicht g in Grammen, und dessen Dichtigkeit δ ; ferner den Magnetismus m , eventuell corrigirt in Bezug auf die Länge l , endlich die auf gleiche Massen reducirten Magnetismen, d. h. die Quotienten $\mu = \frac{m}{g}$; diese Quotienten sind die gesuchten Functionen von δ . Die magnetisirende Kraft war bei jeder Versuchsreihe streng constant und bei den hier zunächst angegebenen Tabellen ziemlich gross; in absolutem Maasse habe ich sie nicht gemessen. Auch das Maass des Magnetismus ist ein relatives, und in den verschiedenen Tabellen im allgemeinen nicht dasselbe.

Tabelle 7.

$d = 7,4 \text{ mm}$				
N	1	2	3	4
l	150	154	152	155
Pc	50	71,4	83,3	100
g	2,085	4,805	8,005	2,006
δ	0,3231	0,7254	1,2244	3,009
m	596	1994	4370	16150
($l = 150$)				
μ	285	415	546	807

Tabelle 8.

$d = 7,4 \text{ mm}$				
N	21	22	23	24
l	137	159	151	150
Pc	50	71,4	83,3	100
g	1,350	391	6,20	1902
δ	0,229	0,571	0,954	2,948
m	229	984	1765	7530
μ	169	252	289	396

Tabelle 9.

<i>N</i>	<i>d</i>	<i>l</i>	<i>Pc</i>	<i>g</i>	δ	<i>m</i>	μ
36	10,1	155	5,4	0,197	0,0159	33	167
37	10,1	154	20	0,984	0,0797	186	189

Tabelle 10.

d = 7,4 mm

<i>N</i>	71	72	73	74	75	77	78
<i>l</i>	147	157	149	159?	159	154	155
<i>Pc</i>	12,5	20,0	33,3	50,0	71,0	91,0	100
<i>g</i>	0,267	0,576	0,973	1,91	5,08	9,93	18,14
δ	0,0423	0,0853	0,151	0,279	0,742	1,500	2,72
<i>m</i>	79	206	343	685	2610	6820	16800
μ	296	358	352	356	514	687	927

Tabelle 11.

l = 148, *d* = 7,4 mm

<i>N</i>	81	82	83	84	<i>N</i>	81	82	83	84
<i>Pc</i>	5,4	20	50	100	<i>m</i>	6,5	58	174	3916
<i>g</i>	0,112	0,598	1,835	18,99	μ	58	97	95	206
δ	0,0176	0,0939	0,288	2,98					

Tabelle 12.

l = 100 mm, *d* = 10,1 mm

<i>N</i>	98	99	100	101	102	103
<i>Pc</i>	12,5	33,3	71	83	91	100
<i>g</i>	0,366	1,33	5,34	9,47	14,12	28,94
δ	0,0457	0,166	0,666	1,182	1,762	3,612
<i>m</i>	82	396	1813	4269	6630	24700
μ	224	252	339	438	470	853

Was diese Zahlen zunächst zeigen, ist, dass im grossen ganzen μ stark mit δ wächst. Der temporäre Magnetismus von Eisenpulvern nimmt also mit ihrer Dichtigkeit unter sonst gleichen Umständen stark zu. Die äussersten Dichtigkeiten, welche oben vorkommen, sind $\delta = 0,0176$ und $\delta = 3,612$, d. h. etwa $\frac{1}{46}$, resp. $\frac{1}{2,2}$ von der Dichtigkeit des cohärenten Eisens. Diesen Grenzwerten entsprechen Magnetismen, welche sich etwa wie 1:4 ver-

halten. Weiter zu gehen, gelang mir weder nach der Seite der stärkern Verdichtung, noch nach der Seite der stärkern Verdünnung; nach jener nicht, weil die Röhren sprangen, nach dieser nicht, weil bei der Schwäche der Magnetismen so fein vertheilten Eisens die Spirale dem Messapparate in eine Nähe gebracht werden musste, welche die Beobachtung unsicher und die Rechnung allzu complicirt machte.

Die obigen Zahlen lehren ferner, dass die Zunahme des Magnetismus mit der Dichtigkeit durchaus keine gleichförmige ist; vielmehr nimmt der Magnetismus für kleine Dichtigkeiten stark, für mittlere schwach und für grosse wiederum stark zu. Dass weiterhin auch noch vom möglichst dichten, pulverförmigen bis zum consistenten Zustande eine starke Zunahme des Magnetismus stattfindet, ergaben vergleichende Beobachtungen an dichten, reinen Eisenpulvern und an mit ihnen gleich langen und nahezu gleich dicken Stäben weichen Eisens. Auch hier genüge es, einige Zahlen anzugeben.

Tabelle 13.

	l	d	g	δ	m	$m : g$
Pulver	99	10,2	29,51	3,65	1824	62
Stab 1	99	10,75	70,21	7,87	8320	119

Die grössere Dicke des Stabes hätte, streng genommen, eine kleine Correction erfordert; dieselbe wurde unterlassen, weil hier andererseits, eben in Folge der grösseren Dicke, die magnetisirende Kraft etwas grösser ist.

Ferner für verschiedene magnetisirende Kräfte:

Tabelle 14.

Pulver: $\delta = 3,37$. Stab 3: $\delta = 7,8$.

i	12	32,5	58,5	114	166	315
$m : g = \mu$ } (Stab)	90	253	455	870	1237	1956
$m' : g' = \mu'$ } (Pulver)	29	84	160	338	508	933
$\mu : \mu'$	3,1	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1

Tabelle 15.

Pulver: $\delta = 3,12$. Stab 3: $\delta = 7,8$.

i	16,5	44,5	78	148	214	398
μ	216	619	1076	2127	3023	5564
μ'	53	158	304	656	1002	1928
$\mu : \mu'$	4,1	3,9	3,5	3,2	3,0	2,9

Wie man sieht, schwankt das Verhältniss der Magnetismen des consistenten Eisens und des Eisenpulvers zwischen den Grenzen 2 und 4, je nach der Dichtigkeit des Pulvers (je grösser dieselbe, desto kleiner ist natürlich das Verhältniss) und je nach der Grösse der Kraft (für grosse Kräfte ist es kleiner als für geringe); theilweise stimmt dies Ergebniss recht gut mit demjenigen von v. Waltenhofen (p. 363). Im ganzen ergibt sich somit, dass der Magnetismus consistenten Eisens unter sonst gleichen Umständen etwa acht- bis zwölfmal so stark ist wie derjenige des äusserst verdünnten Eisens.

Im übrigen bieten die Tabellen 9 bis 12 ziemlich grosse Verschiedenheiten dar; so fällt z. B. die langsame Zunahme des Magnetismus nicht stets auf dieselben Dichtigkeitswerthe; einige Zahlen deuten sogar auf eine kurz andauernde Verminderung des Magnetismus (Tab. 10 zwischen $\delta = 0,0853$ und $\delta = 0,279$; Tab. 11 zwischen $\delta = 0,0939$ und $\delta = 0,288$); theilweise mögen diese Verschiedenheiten auf Rechnung der übrigen, von Reihe zu Reihe variirenden Grössen, als Dicke, Länge und Kraft kommen; theilweise rühren sie aber jedenfalls von unberechenbaren, mit der schwankenden Natur pulverförmiger Körper zusammenhängenden Einflüssen her. Es soll daher vorläufig auf dieselben nicht des Näheren eingegangen und nur betont werden, dass die Zahlen der Tabelle 12 als die zuverlässigsten und von Fehlern freiesten zu betrachten sind.

Die Resultate meiner Versuche bestätigen qualitativ diejenigen von Toepler und v. Ettingshausen, zum Theil auch die von v. Waltenhofen, stehen aber mit denen von

Boernstein im Widerspruch. Eine quantitative Vergleichung ist nicht ausführbar, weil bei jenen älteren Versuchen die Angaben über die absolute Dichtigkeit der benutzten Pulver fehlen.

Mit der Frage der Abhängigkeit des Magnetismus von der Dichtigkeit hat E. Becquerel¹⁾ eine andere in Verbindung gebracht, indem er die Vermuthung aussprach, dass die Verschiedenheit der Magnetismen von Eisen, Nickel und Kobalt nur eine Folge ihrer Dichtigkeitsunterschiede sein möchte. Theils um diese Frage zu entscheiden, theils um überhaupt das Verhalten des Nickels kennen zu lernen, habe ich auch Nickelpulver in den Kreis meiner Beobachtungen gezogen. Dasselbe war freilich nicht direct auf chemischem Wege, sondern mit der Feile hergestellt; es war aber trotzdem nicht sehr grobkörnig, und sein Gehalt an Eisen lag, wenn überhaupt vorhanden, jedenfalls unter einem Tausendtheil. Die Mischung mit Holz und die Einfüllung in Röhren geschah hier genau wie beim Eisen; nur musste wegen der geringen Adhäsion auf die gleichmässige Vertheilung noch grössere Sorgfalt verwendet werden. Einige der zuverlässigsten Versuchsergebnisse sind im Folgenden zusammengestellt. Die magnetisirende Kraft war meist erheblich, die Einheit des Magnetismus ist in den verschiedenen Reihen nicht dieselbe; *g* bedeutet das Gewicht des in dem Gemenge enthaltenen Nickels, die übrigen Zeichen haben die frühere Bedeutung.

Tabelle 16.

d = 7,4 mm.

Nr.	42	43	44	45	46
<i>l</i>	163	152	150	154	146
<i>Pc</i>	33,3	50	67,3	90,5	100
<i>g</i>	0,94	2,34	3,01	9,16	18,47
<i>δ</i>	0,134	0,358	0,465	1,383	2,902
<i>m</i>	69,5	305	346	1368	3183
<i>μ</i>	74	110	115	149	172

1) E. Becquerel, *Compt. rend.* 20. p. 1708. 1845.

Tabelle 17.

 $d = 7,4 \text{ mm.}$

Nr.	61	62	63	64	65
l	148	155	152	157	156
Pc	18,6	33,3	65,2	90,5	100
g	0,413	1,027	3,605	11,611	24,89
δ	0,065	0,154	0,551	1,72	3,72
m	64	178	786	3320	7700
μ	155	173	218	286	306

Tabelle 18.¹⁾ $l = 100 \text{ mm,} \quad d = 10,1 \text{ mm.}$

Nr.	104	105	106	107	108	109	110
Pc	18,4	33,3	66,6	90	100	100	100
g	0,548	1,383	4,714	14,64	27,75	31,36	33,06
δ	0,0684	0,1726	0,5884	1,828	3,464	3,914	4,126
m	61	169	672	2536	5355	7541	8550
μ	111	123	145	173	193	241	259

Aus diesen Tabellen folgt, dass auch verschiedene Nickelpulvertemporäre Magnetismen zeigen, welche unter sonst gleichen Umständen desto grösser sind, je grösser die Dichtigkeit ist. Auch erkennt man in allen drei Versuchsreihen die beiden ersten von den drei beim Eisen unterschiedenen Gebiete wieder, nämlich das Gebiet starken Ansteigens für kleine, und das Gebiet schwachen Ansteigens für grössere Dichtigkeiten; dagegen fehlt bei den beiden ersten Reihen das letzte Gebiet, das des erneuten starken Ansteigens für grosse Dichtigkeiten; um so deutlicher zeigt die dritte Reihe dasselbe, indem sie zugleich erkennen lässt, warum bei den übrigen dieses Gebiet fehlt. Es ist dazu nämlich eine viel grössere Dichtigkeit erforderlich, als beim Eisen; eine Dichtigkeit, welche der halben Dichte des consistenten Metalles sich nähert, und die den Pulvern 108, 109, 110 (Tab. 18) nur durch starke Pressung gegeben werden konnte. Diese und die übrigen

1) Die magnetisierende Kraft sowie die Einheit des Magnetismus ist hier dieselbe wie in Tab. 12.

besprochenen und noch zu besprechenden Verhältnisse werden in sehr deutlicher Weise durch die Fig. 3 Taf. IV veranschaulicht, welche in den Curven I und II die Abhängigkeit der Magnetismen von Eisen und Nickel von der Dichtigkeit gemäss den Tabellen 12 und 18 darstellt, letztere der bequemeren Vergleichung halber in doppeltem Massstabe.

Hat sich somit ein Unterschied in dem Verhalten von Nickel und Eisen ergeben, welcher sich so zu sagen auf den zweiten Differentialquotienten des Magnetismus nach der Dichtigkeit, d. h. auf die Krümmung der die Functionalabhängigkeit darstellenden Curve bezieht, so sind diesem Unterschiede zwei weitere auf den ersten Differentialquotienten und den Functionalwerth selbst, d. h. auf die Steigung und die Höhe der Curve bezügliche hinzuzufügen. Erstens nämlich steigt der Magnetismus des Nickelpulvers vom Zustande grösster Zerstreuung bis zum Zustande grösster Verdichtung ($\delta = 0,06$ bis $\delta = 4,13$) nur auf das zwei- bis dreifache (beim Eisen auf das vierfache) seines Werthes, wobei allerdings zu bedenken ist, dass in der Zerstreuung hier nicht so weit gegangen worden ist wie beim Eisen. Zweitens aber, und das führt uns auf den Ausgangspunkt der Betrachtung des Nickels zurück, ist der Magnetismus dieses Metalls, seinem absoluten Betrage nach, für alle untersuchten Dichtigkeiten kleiner als derjenige des Eisens. Es ergibt sich dies aus einer Vergleichung der Tabellen 12 und 18, in welchen die Einheit des Magnetismus die nämliche ist. Man erhält nämlich durch graphische Interpolation mit Hülfe der Fig. 3 Taf. IV für das Verhältniss der gleichen Dichtigkeiten entsprechenden Magnetismen die Werthe $\mu(ni) : \mu(fe)$, welche in der folgenden Tabelle angegeben sind.

Tabelle 19.

δ	0,05	0,1	0,5	1	2	4
$\frac{\mu(ni)}{\mu(fe)}$	0,49	0,49	0,45	0,39	0,35	0,24

Nickelpulver zeigt also bei keiner Dichtigkeit mehr als halb so starken Magnetismus wie das

gleich dichte Eisen; für sehr kleine Dichtigkeiten ist er gerade halb so stark; mit steigender Dichtigkeit nimmt dann dieses Verhältniss stetig ab und ist bei der halben natürlichen Dichtigkeit nur noch ein Viertel. Es holt jedoch das Nickel weiterhin dieses Zurückbleiben wieder ein; zahlreiche Versuche von älteren und neueren Physikern¹⁾ haben nämlich für die cohärenten Metalle das Verhältniss $\mu(\text{Ni}) : \mu(\text{Fe})$ wieder nahezu gleich $\frac{1}{2}$ ergeben. Da nun nicht anzunehmen ist, dass die Dichtigkeit, welche bei Pulvern den oben angegebenen mässigen Einfluss auf den Magnetismus ausübt, bei festen Metallen einen so gewaltigen Einfluss habe, dass sie beim Ansteigen von 7,8 auf 8,5 (Dichtigkeiten von Eisen und Nickel) den Magnetismus des Eisens um 100 Proc. veränderte, da ferner diese Veränderung, entgegen den obigen Ergebnissen, in einer Abnahme bestehen müsste, da endlich es mindestens sehr unwahrscheinlich ist, dass Eisen und Nickel bei einer gleichen Dichtigkeit gleichen, bei allen anderen gleichen Dichtigkeiten wesentlich verschiedenen Magnetismus besitzen, so ist zu schliessen, dass die Behauptung Becquerel's der Wirklichkeit nicht entspricht. Das Verhältniss der Magnetismen von Nickel und Eisen für verschiedene Dichtigkeiten (und grosse Kräfte) ist in Taf. IV Fig. 4 graphisch dargestellt.

Will man der zwischen Dichtigkeit und Magnetismus bestehenden Functionalbeziehung auch eine mathematische Form geben, etwa die einer Potenzreihe in δ , so muss man die letztere mit einem von δ unabhängigen Gliede beginnen. Dasselbe stellt den Magnetismus eines unendlich zerstreuten Eisen- oder Nickelpulvers dar und beträgt etwa ein Zehntel der ganzen Summe. Als zweites Glied muss man sodann ein mit δ proportionales, und zwar mit einem positiven Coëfficienten behaftetes setzen. Da weiterhin die Zunahme des Magnetismus erst schwächer,

1) Vergleiche über die älteren Wied. Galv. (2) 2. p. 360. Von neueren fand namentlich Hankel (Wied. Ann. 1. p. 285. 1877) für grosse magnetisirende Kräfte und gleiche Volumina das Verhältniss der Magnetismen von Nickel und Eisen gleich 133 : 239.

dann wiederum stärker wird, so müssen nunmehr zwei Glieder mit höheren Potenzen von δ folgen, deren erstes einen negativen, deren zweites einen positiven Coëfficienten besitzt. Welche Exponenten man wählt, ist natürlich vom Standpunkte rein empirischer Darstellung gleichgültig; aus theoretischen Gründen habe ich:

$$(4) \quad \mu = a + b\delta - c\delta^{\frac{2}{3}} + d\delta^{\frac{1}{3}} - \dots$$

gesetzt; diese Reihe ist nämlich unter gewissen Annahmen mit der Reihe:

$$(5) \quad \mu = a + \frac{b}{\varrho^3} - \frac{c}{\varrho^3} + \frac{d}{\varrho^3} - \dots$$

identisch, in welcher ϱ den mittlern Molecularabstand bedeutet, und an welche unten angeknüpft werden wird.

Die numerische Bestimmung der Coëfficienten ist natürlich bei der Schwierigkeit der Versuche nicht mit ausreichender Sicherheit zu leisten; um aber wenigstens ein Bild von der Grössenordnung derselben zu erhalten, habe ich die Zahlen der beiden besten Versuchsreihen, Tab. 12 für Eisen und Tab. 18 für Nickel, berechnet. Für Eisen ergibt die Benutzung der vier Pulver 98, 100, 102 und 103 die Gleichung:

$$(6) \quad \mu(fe) = 211 (1 + 1,5\delta - 1,0\delta^{\frac{2}{3}} + 0,3\delta^{\frac{1}{3}}),$$

für Nickel die Benutzung der vier Pulver 104, 106, 108, 110 die Gleichung:

$$(7) \quad \mu(ni) = 100 (1 + 1,5\delta - 1,4\delta^{\frac{2}{3}} + 0,4\delta^{\frac{1}{3}}).$$

Diese Gleichungen zeigen im wesentlichen, dass die Coëfficienten der von δ abhängigen Glieder durchaus nicht klein sind gegen das constante Glied; die beiden Coëfficienten von δ und $-\delta^{\frac{2}{3}}$ sind sogar grösser als jenes. Dass übrigens die Formeln auch zahlenmässig nicht ohne jede Zuverlässigkeit sind, lehrt der Umstand, dass sie auch für andere Werthe-paare von δ und μ als die zur Berechnung benutzten, zum Theil in sehr befriedigender Weise stimmen. Auch ergeben sie, über die durch die Berechnung gesteckten Grenzen hinaus, auf die consistenten Metalle angewendet (etwa $\delta = 8$) deren Magnetismen im richtigen Verhältnisse von etwas über 2. Jeden einzelnen dieser Magnetismen freilich liefern

sie viel zu gross, nämlich etwa 15 mal so gross wie für sehr kleine δ , während er nach dem Obigen nur etwa 10 mal so gross ist; daraus ist jedoch nur zu schliessen, dass für consistente Metalle mindestens ein weiteres Glied von der Form $-e\delta^{\frac{2}{3}}$ hinzugefügt werden muss; dabei brauchte der Coëfficient e , da für $\delta = 8$ $\delta^{\frac{2}{3}} = 512$ ist, nur den sehr kleinen Werth $e = 0,015$ zu erhalten.

Es bleibt mir noch übrig, die Versuche zu besprechen, welche ich über den Einfluss der magnetisirenden Kraft auf den temporären Magnetismus der Pulver anstellte.

Bei diesen Versuchen fing ich stets mit der kleinsten Kraft an und hörte mit der grössten auf; bei dem starken remanenten Magnetismus, welchen pulverförmige Magnetisirungskörper auffälligerweise zeigen, ist diese Reihenfolge durchaus erforderlich. Ferner ging ich von dem schwächern zum stärkern Strome (die Spirale war stets dieselbe) stets über, ohne den Strom zu öffnen; die Benutzung einer Siemens'schen Widerstandsscala gestattete dies Verfahren. Dadurch wurde eine gewisse beträchtliche Fehlerquelle, wenn auch nicht ganz beseitigt, so doch bedeutend geschwächt; bezügliche Versuche ergaben nämlich, dass, wenn man dasselbe Pulver zweimal hintereinander durch dieselbe Kraft magnetisirt, der Magnetismus beim zweiten Versuche beträchtlich grösser ausfällt, dass also die Magnetisirbarkeit der Pulver durch ihre Magnetisirung zunimmt. Bei den bisher besprochenen Versuchen wurden daher ausschliesslich frisch gefällte Pulver benutzt; bei den nun anzuführenden war dies offenbar nicht möglich. Die erhaltene Zunahme des Magnetismus mit der äussern Kraft muss daher als zu gross, und die Zahlen selbst dürfen mithin nur als obere Grenzwerte angesehen werden.

Wird hierdurch der Werth dieser Versuche erheblich beeinträchtigt, so geschieht dies noch mehr durch die grosse Unregelmässigkeit der auftretenden Resultate; eine Unregelmässigkeit, welche auch die bezüglichen Versuche Boernstein's aufweisen, und welche nur wenige sichere Schlüsse gestattet. Ueber die Ursache dieser Ungesetzmässigkeit habe

ich, ausser dem bereits angeführten, nur die Vermuthung, dass die äussere Kraft ausser der Magnetisirungsarbeit noch andere Arbeit, insbesondere bei nicht genügend verdichteten Pulvern mechanische Arbeit leiste, was auf die erstere nicht ohne erheblichen Einfluss sein kann; in ähnlicher Weise übt bekanntlich bei consistenten Körpern die Härte einen sehr starken Einfluss auf das Ansteigen des Magnetismus aus, ja Riecke¹⁾ fand sogar bei einem und demselben Stück Eisen innerhalb zweier Jahre ganz verschiedene Resultate.

Wie bei den consistenten, so auch bei den pulverförmigen Körpern wächst der Magnetismus für sehr kleine Kräfte proportional mit diesen, für grössere schneller als diese und für noch grössere langsamer. Mit anderen Worten: Das Verhältniss k des Magnetismus m zur Kraft i ist im ersten Theile der Magnetisurcurve constant, im zweiten nimmt es zu, im dritten ab. Der zweite dieser drei Theile scheint jedoch bei sehr zerstreutem Eisenpulver zu fehlen; hier nimmt k schon für sehr kleine Kräfte ab. Das zeigt z. B. die folgende Tabelle.

Tabelle 20.

Pulver 115, bestehend aus 12,5 Proc. Fe und 87,5 Proc. Holz.

$$\delta (fe) = 0,052. \quad l = 97. \quad d = 10,2.$$

i	13	35,5	63	117	165	275
m	14	38	67	118	162	254
$\text{const} \times k$	100	99	98	96	91	86

Dagegen zeigen die beiden folgenden Tabellen schon eine, wenn auch schwache anfängliche Zunahme von k .

Tabelle 21.

Nr 116. 45 Proc. Fe $\delta = 0,232. \quad l = 98. \quad d = 10,2.$

i	13	34,5	60,5	112	159	265
m	47	129	225	404	568	892
$\text{const.} \times k$	100	101	101	100	99	94

1) Riecke, Pogg. Ann. 149. p. 433. 1873.

Tabelle 22.

Nr. 117. 83 Proc. Fe $\delta = 1,404$. $l = 99$. $d = 10,2$.

i	13	34,5	60,5	111,5	156	260
m	520	1431	2525	4703	6157	9960
k	100	104	104	106	99	96

Bei reinem Eisenpulver ist endlich die Zunahme von k noch beträchtlicher, und hält überdies länger an.

Tabelle 23.

Nr. 119. Eisenpulver. $\delta = 3,37$. $l = 95$. $d = 10,2$.

i	12	33	59	116	170	326
m	70	203	388	817	1228	2257
k	100	103	112	119	123	118

Ein Theil dieser Zunahme von k scheint jedoch auf die oben angedeuteten fremden Einflüsse abgerechnet werden zu müssen; eine andere Versuchsreihe mit reinem Eisenpulver z. B., nicht minder sorgfältig ausgeführt, ergab nämlich eine viel kleinere Zunahme.

Tabelle 24.

Nr. 132. $\delta = 3,5$. $l = 90$. $d = 10,2$.

i	26	49	101	156	375
m	121	232	502	798	1811
k	100	103	108	110	105

So verschiedene Werthe von k diese beiden Tabellen auch ergeben, in einem Punkte stimmen sie überein: das Maximum von k tritt bei derselben Stromstärke ein. Dies zeigte sich bei gleicher Dichtigkeit ganz allgemein, und ferner, dass dieser sogenannte Wendepunkt bei einer desto geringeren Kraft eintritt, je zerstreuter das Pulver ist. Diese Verhältnisse werden durch die Fig. 5 Taf. IV in deutlicher Weise veranschaulicht; die dem Pulver 119 entsprechende Curve ist daselbst punktirt, die Wendepunkte sind mit W bezeichnet.

Ähnliche Resultate ergeben analoge Versuche mit reinem oder mit Holz gemengtem Nickelpulver.

Tabelle 25.

Nr. 120. 33,3 Proc. Ni. $\delta = 0,179$. $l = 90$. $d = 10,2$.

i	11	32	56	108	156	278
m	11	32	55	105	154	276
const. $\times k$	100	100	98	97	99	99

Tabelle 26.

Nr. 136. 90,5 Proc. Ni. $\delta = 1,75$ etwa. $d = 10,2$.

i	20,5	37	78	124	301
m	30	58	134	232	579
k	100	108	118	127	131

Tabelle 27.

Nr. 133. Reines Nickelpulver. δ etwa = 3,8.

i	20,5	38	78	123	297
m	50	98	233	412	1056
k	100	105	126	137	146

Je dichter das Nickel vertheilt ist, desto stärker nimmt also k zu. Darauf, dass es bei den beiden letzten der hier mitgetheilten Reihen überhaupt stärker zunimmt, als beim Eisen, ist kein Gewicht zu legen, weil das Nickelpulver gröber als das Eisenpulver und nicht wie dieses chemisch, sondern mechanisch hergestellt war, sodass jener Umstand sehr wohl fremden Einflüssen zugeschrieben werden kann.

Ein Zustand, welchen ich bei diesen Versuchen nicht nur nie erreichte, sondern dem ich auch, trotz Anwendung grosser magnetisirender Kräfte und sehr schwacher Magnetisirungskörper, niemals sehr nahe kam, ist der Zustand der sogenannten magnetischen Sättigung. Während nämlich dieser Zustand durch die Constanz der Werthe von m charakterisirt ist, nahm bei meinen Versuchen m , selbst wenn es bereits stark zugenommen hatte, unbegrenzt, wenn auch mit abnehmender Geschwindigkeit, weiter zu.

Was endlich den Vergleich der Pulver mit consistenten Stäben von gleichen Dimensionen hinsichtlich des Ansteigens des Magnetismus betrifft, so ist derselbe wegen des

Einfluss
sich, w
Magn
schwä
rer B
dere
nente
stimmt
erforde
weich
dem A
gering
ergabe
sionen
gende

nung
äusse
schei
tische
späte

1)
den v
Eisen
gethei

Einflusses der Härte schwer durchzuführen. Jedoch lässt sich, wie ich fand, so viel sagen, dass das Ansteigen des Magnetismus mit der äussern Kraft bei Pulvern ein schwächeres ist als bei Stäben, welche sich in anderer Beziehung ebenso verhalten, welche insbesondere einen verhältnissmässig ebenso starken remanenten Magnetismus zeigen. Dazu ist ein ganz bestimmter Härtegrad, und zwar ein gar nicht sehr geringer, erforderlich.¹⁾ Andererseits aber zeigen Stäbe, welche so weich sind, dass sie so gut wie gar keinen Magnetismus nach dem Aufhören der äussern Kraft zurückbehalten, ein erheblich geringeres Ansteigen von k , als die dichteren Pulver. So ergaben zwei Stäbe aus schwedischem Eisen, deren Dimensionen mit den obigen Pulvern etwa übereinstimmten, folgende Zahlen.

Tabelle 28.

Stab 4. $\delta = 7,8$.

i	15,5	44	80	151	213	404
m	124	353	649	1232	1740	3075
k	100	100	101	102	102	95

Tabelle 29.

Stab 5. $\delta = 7,8$.

i	16	44	77	144	211	388
m	122	342	602	1148	1652	2586
k	100	102	103	105	103	95

Aus dem Angeführten geht hervor, dass die Erscheinung des Ansteigens des temporären Magnetismus mit der äussern Kraft in nahem Zusammenhange steht mit den Erscheinungen des remanenten Magnetismus und der magnetischen Nachwirkung: ich beabsichtige, demgemäss in einer späteren Arbeit hierauf zurückzukommen.

1) Ich führe meine hierher gehörigen Versuche nicht an, weil sie mit den von Ruths in seiner Schrift: „Ueber den Magnetismus weicher Eisencylinder und verschieden harter Stahlsorten“, Dortmund 1876, mitgetheilten völlig übereinstimmen.

Für jetzt stelle ich die wesentlichsten Ergebnisse der Untersuchung wie folgt zusammen:

Der temporäre Magnetismus cylindrischer Körper ist unter übrigens gleichen Umständen:

- 1) mit der Masse proportional;
- 2) desto grösser, je grösser die Länge ist;
- 3) desto grösser, je kleiner die Dicke ist;
- 4) nur von der Gestalt, nicht aber von der Grösse abhängig;
- 5) desto grösser, je grösser die Dichtigkeit ist (von einer Einschränkung dieses Satzes wird noch die Rede sein);
- 6) bei Nickel, je nach der Dichtigkeit und Kraft, ein Viertel bis halb so gross wie beim Eisen;
- 7) er wächst mit der magnetisirenden Kraft, zuerst proportional, dann (ausser bei sehr geringer Dichtigkeit) schneller, zuletzt langsamer als jene;
- 8) das raschere Ansteigen ist desto stärker, je dichter der Körper ist;
- 9) der Wendepunkt liegt bei gleicher Dichtigkeit an derselben Stelle; aber bei desto grösseren Kräften, je grösser die Dichtigkeit ist;
- 10) zur magnetischen Sättigung von Pulvern sind ausserordentlich grosse Kräfte erforderlich.

3) Theoretisches.

Man hat zur Beschreibung der magnetischen Erscheinungen eine ganze Reihe von Theorien aufgestellt; nur zwei von ihnen sind aber bisher im Hinblick auf die hier behandelten Gesetze der Induction des temporären Magnetismus ausgeführt worden, nämlich die Theorie der magnetischen Fluida zur Beschreibung des Einflusses von Grösse und Gestalt (Kugel, Ellipsoid u. s. w.) und die Theorie der drehbaren Molecularmagnete zur Beschreibung des Einflusses der äussern magnetisirenden Kraft. Hier soll, unter Vorbehalt der weitem Ausführung, nur angedeutet werden, wie alle zugehörigen Erscheinungen vom Standpunkte der letzteren Theorie aus aufgefasst werden können.

Die fundamentale Thatsache im Gebiete der magneti-

sehen Induction ist die, dass eine endliche Kraft im allgemeinen nur eine unvollständige Magnetisirung zu Stande bringt. Dadurch wird man gezwungen, zu der gegebenen äusseren Kraft innere Kräfte in Gedanken hinzuzufügen. Durch das Gleichgewicht der inneren und äusseren Kräfte ist dann der temporäre magnetische Zustand bestimmt. Der Begründer der in Rede stehenden Theorie, Wilhelm Weber¹⁾, nannte die innere Kraft, welche auf jeden Molecularmagnet wirkt, seine Directionskraft, und verlegte sie in die Richtung seiner ursprünglichen Axe. Diese Annahme führt in Bezug auf den Einfluss der äusseren Kraft, der hier zunächst betrachtet werden möge, zu dem Resultate, dass der Magnetismus anfangs proportional mit der äusseren Kraft, später aber langsamer als diese wächst und schliesslich einem Maximum (Sättigungspunkt) sich nähert. Mit der Erfahrung stimmt dieses Ergebniss nur in roher Annäherung überein; die Erscheinung namentlich, dass zwischen den Gebieten der Proportionalität und der langsameren Zunahme im allgemeinen ein solches rascherer Zunahme liegt²⁾, bleibt gänzlich unbeschrieben. Man muss also die Theorie in irgend einer Weise modificiren.

Verschiedene Forscher haben dies gethan, indem sie auf den von Weber gänzlich unbestimmt gelassenen Begriff der Directionschaft näher eingingen; es sind das namentlich G. Wiedemann, Stefan³⁾, Boernstein, Chwolson und v. Waltenhofen. Zwei wesentliche Bestandtheile der Directionskraft lassen sich ohne weiteres angeben, nämlich die gravitirende Wechselwirkung der Moleculé und ihre magnetische Wechselwirkung. Ueber die Natur der letztern sind jedoch die Ansichten gänzlich getheilt. Während nämlich Boernstein, um die von ihm gefundene Abnahme des Magnetismus mit wachsender Dichtigkeit zu erklären, die Wechselwirkung der äusseren Kraft entgegenwirken lässt, lässt v. Wal-

1) W. Weber, *Abh. d. math.-phys. Cl. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss.* I. p. 570. 1852.

2) G. Wiedemann, *Pogg. Ann.* **100.** p. 235. 1857; **106.** p. 161. 1859. **117.** p. 194. 1862.

3) Stefan, *Wien. Ber.* **69.** (2) p. 196. 1874.

tenhofen, der eine Zunahme des Magnetismus mit der Dichtigkeit fand, die Wechselwirkung die äussere Kraft unterstützen. Es hat dies jedoch den Nachtheil, dass die Nothwendigkeit eintritt, andere Kräfte hinzuzufügen, welche den beiden bisherigen entgegenwirken; das können nur Gravitations- oder, wie v. Waltenhofen sie nennt, Cohäsionskräfte sein; es ist aber nicht zweckmässig, derartige Kräfte in die Betrachtung einzuführen, da erfahrungsmässig eine in quantitativer Hinsicht wesentliche Beziehung zwischen den mechanischen und den magnetischen Erscheinungen nicht besteht; der Einfluss von Dehnung, Biegung und Drillung auf den Magnetismus und umgekehrt ist zwar ein sehr regelmässiger und interessanter, aber numerisch höchst schwacher. Ich meine also: zur Beschreibung rein magnetischer Erscheinungen mechanische Kräfte zu Hülfe zu nehmen, ist nicht zweckmässig. In der That lässt Boernstein¹⁾, welcher ihrer nicht bedarf, dieselben für die temporär magnetischen Erscheinungen gänzlich ausser Betracht.

In der folgerichtigsten Weise hat Chwolson²⁾ die Weber'sche Theorie modificirt. Er definirt die Directions-kraft einfach als die magnetische Wechselwirkung der Molecüle, lässt sie der äussern Kraft entgegenwirken, setzt sie aber mit zunehmender äusserer Kraft der Richtung und Grösse nach variabel; eine Annahme, auf deren Nothwendigkeit schon G. Wiedemann hingewiesen hatte. Denken wir uns, um die Bedeutung dieser Annahme zu verstehen, ein im unmagnetischen Zustande befindliches System magnetischer Molecüle; im gesammten System wird keine Richtung über die anderen überwiegen; aber, nach der Natur der Wechselwirkung, die Richtungen der Molecüle werden sich nicht sprungweise, sondern continuirlich ändern; ein Magnet wird also die in Taf. IV Fig. 6, nicht die in Taf. IV Fig. 7 dargestellte Constitution besitzen.³⁾ Greifen wir daher eine

1) Boernstein, l. c. p. 350 ff.

2) Chwolson, Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 53. 1876.

3) Eine ähnliche Vorstellung hat schon Chwolson entwickelt; jedoch sind die Betrachtungen, welche er zu ihrer Begründung anführt, im allgemeinen nicht stichhaltig. Denn wenn er sagt, in der Umgebung eines

kleine Gruppe von Moleculen heraus, so haben sie sämmtlich nahezu gleiche Richtung. In diesem Zustande wirkt also die Wechselwirkung in der Richtung des betrachteten Centralmoleculs; wirkt nunmehr aber die äussere Kraft, so wirkt sie einmal auf das Centralmolecul, sodann aber auch auf die ganze umgebende Gruppe; sie ändert somit die Wechselwirkung der Grösse und Richtung nach. Chwolson zeigt nun, dass dadurch das Moment der Wechselwirkung für kleine Kräfte verringert wird; der Magnetismus muss also mit wachsender Kraft rascher als diese zunehmen.

Weiter ergibt sich die von Boernstein und mir constatirte Thatsache, dass jenes raschere Ansteigen desto mehr hervortritt, je dichter der Magnetisirungskörper ist, unmittelbar. Denn mit abnehmender Dichtigkeit nimmt die Wechselwirkung ab, also auch ihre Aenderung durch die äussere Kraft. Ist die Dichtigkeit und somit die Wechselwirkung sehr gering, so wächst das Verhältniss $m : i$ überhaupt nicht, die Weber'sche Theorie gilt dann also streng.

Zur Beschreibung des Einflusses der Dichtigkeit selbst ist dagegen Weber's Theorie auch näherungsweise nicht geeignet. Denn nach ihr müsste, gemäss den Formeln:

$$m \sim \frac{i}{w} (i < w) \quad \text{und} \quad m \sim 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{w}{i} \right)^2 (i > w),$$

in welchen m den Magnetismus, i die äussere Kraft und w

die Richtung α innehaltenden Moleculs müsse eine „Tendenz nach der Richtung α “ vorhanden sein, weil doch eben die Umgebung eine Resultante in der Richtung α ausübe, so gilt das nur unter der Voraussetzung, dass jedes Molecul nur von seinen Nachbarmoleculen beeinflusst werde. Es wird aber, wie wir sehen werden, bei nicht zu grossen Körpern von sämmtlichen übrigen Moleculen beeinflusst. Trotzdem muss die Richtung eine continuirliche Function des Ortes sein, und zwar aus folgendem Grunde: Die Richtung eines Moleculs ist bestimmt durch die Resultante der Einwirkung aller anderen; für das benachbarte Molecul ist aber diese Resultante nahezu dieselbe, weil alle Entfernungen sich nur unendlich wenig geändert haben, die Zahl der Moleculs dieselbe geblieben ist und nur an die Stelle eines sehr kleinen Bruchtheils derselben ebenso viele andere getreten sind. Die Nachbarmoleculs müssen daher nahezu dieselbe Richtung haben. Auf die interessanten Schlüsse, welche sich hieran über die Richtung und den Gleichgewichtszustand der Oberflächenmoleculs knüpfen lassen, kann ich hier nicht eingehen.

die Directionskraft bezeichnet, m wachsen, wenn w abnimmt, gleichviel wie gross i ist; was zwar mit den Resultaten der Versuche Boernstein's im Einklange, dagegen mit denen von Toepler, v. Waltenhofen und mir im Widerspruche steht. Am nächsten liegt es daher in der That, anzunehmen (wie dies v. Waltenhofen thut), die Wechselwirkung unterstütze die äussere Kraft. Dass einer der beiden Bestandtheile, in welcher die magnetische Wechselwirkung sich zerlegen lässt, nämlich die Wirkung von in der Richtung der äussern Kraft benachbarter Moleküle aufeinander, d. h. die Längswirkung die magnetisirende Kraft unterstützen muss, lässt sich durch einen von v. Waltenhofen angeführten Versuch veranschaulichen, wonach eine schwingende Magnetnadel durch einen in der Meridianrichtung von ihr aus befindlichen, senkrecht zu diesem gelegenen Magnetstab stärker abgelenkt wird, wenn rechts und links von ihr zwei andere Nadeln aufgestellt sind, als wenn letztere fehlen. (Taf. IV Fig. 8). Diesem Versuche steht aber ein anderer gegenüber, bei welchem die zweite und dritte Nadel vor und hinter der ersten aufgestellt sind, und wo die Ablenkung durch deren Wirkung verringert wird (Taf. IV Fig. 9). Die Querswirkung schädigt also die äussere Kraft. v. Waltenhofen berücksichtigt diesen Fall nicht, weil ihm die Querswirkung bei Stäben so gering zu sein scheint, dass sie vernachlässigt werden darf. Gerade umgekehrt schliesst Boernstein aus seinen Betrachtungen, die Querswirkung müsse überwiegen. Von vornherein lässt sich, wie ich meine, hierüber überhaupt nichts sagen. Denn wenn auch bei Stäben die Länge über die Dicke überwiegt, so ist andererseits die Längswirkung nur eine lineare, die Querswirkung aber eine flächenhafte. Dazu kommt, dass durchaus nicht der Molecularabstand, welcher die Grösse der Wechselwirkung im wesentlichen bestimmt, in der Querrichtung ebenso gross sein muss wie in der Längsrichtung; verschiedene Erscheinungen sprechen sogar dafür, dass er in der Querrichtung kleiner sei.

Lässt sich somit die Frage, ob die der äussern Kraft günstige Längswirkung oder die ihr ungünstige Querswirkung

überwiege, von vornherein nicht entscheiden, so scheint es, als ob die Thatsache der Abnahme des Magnetismus mit der Dichtigkeit in zwingender Weise für die erstere Alternative spräche. Aber auch dies ist nicht der Fall. Es lässt sich nämlich zeigen, dass jene Thatsache mit der Annahme, die Wechselwirkung wirke der äussern Kraft entgegen, durchaus nicht nothwendigerweise im Widerspruche steht. Denken wir uns nämlich diese Annahme als richtig, und fassen wir zwei Fälle (Taf. IV Fig. 10 u. 11) in's Auge, in welchen die Dichtigkeit verschieden, sonst aber alles gleich ist. $MA = ma$ sei die äussere Kraft der Richtung und Grösse nach, MB , resp. mb das Molecül in seiner ursprünglichen Richtung; im ersten Falle sei seine Endlage MC , im zweiten, welchem eine geringere Dichtigkeit entsprechen möge, sei dieselbe mc , sodass $bmc < BMC$ ist. Die Wechselwirkung sei durch MD , resp. md dargestellt, sodass $MD < md$ ist. Dann müssen im ersten Falle die Momente der Kräfte MA und MD , und im zweiten die Momente der Kräfte ma und md gleich sein. Das Moment von ma ist grösser als das von MA , weil $ma = MA$, aber der Winkel $cma > CMA$ ist; also muss auch das Moment von md grösser sein als das Moment von MD , mithin, da $md = MD$, in höherem Grade der Winkel $dmc > DMC$ sein. Das ist das einzige, was erforderlich ist, damit unsere theoretische Annahme mit unserer beobachteten Thatsache im Einklang sei. Nun hat Chwolson bereits gezeigt, dass „die Drehung des Momentes der Umgebung“, wie er sich treffend ausdrückt, hinter der Drehung des Molecüls selbst zurückbleibt; und es lässt sich weiter zeigen, dass dies in um so höherem Grade der Fall ist, je geringer die Grösse w der Wechselwirkung ist. Der Winkel dmc wird also grösser sein als DMC , und es ist sehr wohl möglich, dass er es in dem erforderlichen Maasse ist; wenigstens für Werthe von w , welche eine gewisse Grösse nicht überschreiten. Zum Beweise, dass es sich wirklich so verhalte, ist die Chwolson'sche Formel nicht anwendbar; vielmehr müsste man, da es sich um unabhängige Variation von w und i handelt, die beiden Weber'schen Formeln unter Berücksichtigung der Drehung des Momentes

der Umgebung in eine neue umgestalten. Diese Umgestaltung erweist sich jedoch als äusserst schwierig.

Gleichzeitig lässt sich die Folgerung ziehen, dass die Zunahme des Magnetismus mit der Dichtigkeit eine desto stärkere sein muss, je grösser die äussere Kraft ist; eine Forderung, welche identisch ist mit der, dass bei dichteren Körpern die Zunahme des Magnetismus mit der Kraft eine stärkere sein müsse als bei weniger dichten; das ist aber nach meinen Versuchen in der That der Fall.

Bisher war von dem Gesetze der Wechselwirkung selbst noch nicht die Rede; es liegt aber kein Grund vor, warum auf diese moleculare Wechselwirkung nicht einfach die für die Fernwirkung endlicher Systeme beobachteten Verhältnisse übertragen werden sollten; was also den Einfluss der Entfernung betrifft, so ist anzunehmen, dass die Wechselwirkung mit der dritten Potenz des Molecularabstandes in erster Annäherung umgekehrt proportional sei. Streng würde dies der Fall sein, wenn die Grösse, oder, unter der Voraussetzung linearer Gestalt, die Länge der Molecüle sehr klein gegen ihre Abstände wäre. Nun geben die Versuche mit Pulvern, wie oben ausgeführt, Resultate, welche jedenfalls qualitativ auf Molecularsysteme übertragen werden dürfen; ferner ist die der Beobachtung zugängliche Dichtigkeit für einen und denselben Stoff mit der dritten Potenz des Molecularabstandes umgekehrt proportional; für sehr zerstreute Pulver müsste sich also Proportionalität der Wechselwirkung mit der Dichtigkeit ergeben, oder, mit Hinzufügung eines, den directen Einfluss der äussern Kraft darstellenden constanten Gliedes, der gesammte Magnetismus muss in diesem Falle eine lineare Function der Dichtigkeit sein. In der That ergibt die Gleichung (4), durch welche ich meine Versuche dargestellt habe, für sehr kleine δ :

$$\mu = a + b\delta,$$

zugleich lehrt aber die entsprechende, mit den numerischen Werthen der Coëfficienten versehene Gleichung (6), welche für Eisen, und ebenso Gl. (7), welche für Nickel gilt, dass schon für Werthe von δ , welche immer noch sehr klein sind,

höhere Potenzen von δ berücksichtigt werden müssen; daraus ist zu schliessen, dass schon bei mässig verdünnten Eisen- und Nickelpulvern die Länge der Molecüle nicht gegen ihren mittleren Abstand zu vernachlässigen ist; bei dichten Pulvern aber, und besonders beim consistenten Eisen kann die Länge der Molecüle gegen ihren Abstand überhaupt nicht klein, sondern muss von derselben Grössenordnung sein.

Uebrigens ist, da die Wechselwirkung aus zwei ganz verschiedenen Theilen, der Längswirkung und der Querswirkung sich zusammensetzt, die angedeutete Functionalbeziehung auf solche Körper zu beschränken, bei welchen der Molecularabstand oder wenigstens sein durchschnittlicher Werth (vgl. oben p. 365) constant ist, und zwar nicht nur von Ort zu Ort, sondern auch von Richtung zu Richtung. Ausgeschlossen sind „anisotrope Körper“, d. h. Körper, deren Längsdichtigkeit von der Querdichtigkeit verschieden ist. Solche Körper müssen, wenn die Theorie richtig ist, einen andern Magnetismus zeigen, als ihnen nach ihrer Gesamtdichtigkeit gemäss der gefundenen Formel zukommt, und zwar einen grössern, wenn die Längsdichtigkeit über die Querdichtigkeit überwiegt, einen geringeren, wenn umgekehrt die Querdichtigkeit über die Längsdichtigkeit überwiegt. Dies haben einige von mir angestellte Versuche ergeben, welche ich erst hier mittheile, weil vom rein empirischen Standpunkte ihre Nützlichkeit nicht hätte dargethan werden können.

Die Anisotropie wurde auf die roheste Weise erzeugt; einerseits nämlich wurden zur Herstellung von Körpern mit überwiegender Querdichtigkeit abwechselnde Schichten von Eisen oder Nickel und Holz in Glasröhren gefüllt, und diese Körper in Bezug auf ihre Magnetismen mit anderen isotropen, womöglich von derselben Gesamtdichtigkeit verglichen. In der That zeigten die ersteren Körper nach Reduction auf gleiche Verhältnisse stets einen beträchtlich geringeren Magnetismus. So ergab eine Röhre Nr. 5, zusammengesetzt aus Eisen- und Holzschichten von je 2 mm Höhe, verglichen einmal mit dem isotropen Pulver Nr. 4 von gleicher Querdichtigkeit und zweitens mit dem durch Mischung

der Schichten von Nr. 5 entstandenen, ebenfalls isotropen Pulver Nr. 6 folgende Resultate.

Tabelle 30.

Nr.	l	d	δ	μ (i klein)	μ (i gross)
4	155	7,4	3,009	142	807
5	156	"	1,59	66	303
6	153	"	1,56	103	604

μ ist hier der auf gleiche Gewichte und Längen reducirte Magnetismus. Auch ergab sich, dass das Ansteigen des Magnetismus mit der äussern Kraft bei Pulvern, deren Längsdichtigkeit gegen die Querdichtigkeit zurücktritt, ebenfalls bedeutend geringer ist als bei im ganzen gleich dichten isotropen Pulvern. Es fand sich nämlich:

Tabelle 31.

i	158	293	451	610	924	2205
Röhre 5						
m	158	288	432	563	827	1708
k	100	98	95	92	89	77
Röhre 6						
m	158	295	469	627	980	2232
k	100	101	104	105	106	101

Hier ist der Magnetismus m für die kleinste äussere Kraft i dieser gleich und sodann $k = 100 \frac{m}{i}$ gesetzt worden. Man sieht, während k bei dem isotropen Pulver 6 seiner schon ziemlich beträchtlichen Dichtigkeit gemäss anfangs mit i wächst und erst für grosse i wiederum abnimmt, nimmt k bei dem anisotropen Pulver 5 von vornherein ab, und schliesslich für grosse i sehr stark. Es verhält sich also ein anisotropes Pulver der betrachteten ersten Gattung wie ein viel dünneres, isotropes, sowohl hinsichtlich des Ansteigens des Magnetismus als auch in Bezug auf dessen Stärke selbst. Aehnlich verhält sich aber, worauf schon Boernstein aufmerksam gemacht hat, Nickel und in noch höherem Grade Kobalt. Vielleicht ist diese Uebereinstimmung keine zu-

fällige, sondern eine Folge der eigenthümlichen Molecularconstitution der magnetischen Metalle, auf welche schon oben (p. 384) hingewiesen wurde.

Anisotrope Körper zweiter Gattung, d. h. Körper, deren Längsdichtigkeit über die Querdichtigkeit überwiegt, sind schon vielfach untersucht worden. Hierher gehören namentlich die vergleichenden Messungen des Magnetismus von Stäben und gleich schweren Nadelbündeln oder hohlen Röhren; bei denjenigen unter diesen Versuchen, bei welchen am sorgfältigsten fremde Einflüsse, insbesondere der grössern Härte der Nadeln, eliminirt wurden, ergab sich, dass Bündel und Röhren verhältnissmässig stärker temporär magnetisch werden als Stäbe, und einige Versuche, welche ich mit Pulvern anstellte, deren Masse der Länge nach durch unmagnetische Stäbchen unterbrochen waren, bestätigen diese Resultate.

Die letzten Betrachtungen führen naturgemäss auf den Einfluss der Grösse und Gestalt auf den temporären Magnetismus. Lehrt schon der starke Einfluss der Dichtigkeit, dass die magnetische Wechselwirkung in weite Entfernungen merklich sein müsse, so folgt dies noch sicherer aus dem Einflusse von Grösse und Gestalt, und insbesondere bei kreisylindrischen Körpern, aus dem Einflusse von Länge und Dicke. Was den erstern betrifft, so kann man sich nämlich einen linearen Magnetisirungskörper in drei Theile zerlegt denken; in einen mittleren, in welchem die volle Wechselwirkung zur Geltung kommt, und in je ein Endstück an jeder Seite, in welchem die Wechselwirkung continuirlich von ihrem vollen Werthe bis zu einem Minimum abnimmt. Sei l die Länge, λ der lineare Bereich der Längswechselwirkung, sei ferner m_0 der in der Längeneinheit direct, m_1 der mit Hülfe der vollen Längswirkung in ihr erregte Magnetismus, sei endlich α ein echter Bruch, so ist der gesammte Magnetismus:

$$(8) \quad M \sim l m_0 + (l - 2\lambda) m_1 + 2\lambda \alpha m_1,$$

oder, wenn $m_1 = \beta m_0$, $l = \gamma \lambda$ gesetzt wird:

$$M \sim \lambda m_0 (\gamma + \beta \{ \gamma + 2\alpha - 2 \}).$$

Nimmt man etwa an, es sei $\alpha = \frac{1}{2}$, so findet man:

$$\text{für } \gamma = 2 : M \sim \lambda m_0 (2 + \beta)$$

$$,, \quad \gamma = 3 : M \sim \lambda m_0 (3 + 2\beta),$$

oder für gleiche Massen:

$$\text{für } \gamma = 2 : \mu \sim \lambda m_0 \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$,, \quad \gamma = 3 : \mu \sim \lambda m_0 \left(1 + \frac{3}{2}\beta\right).$$

Der Magnetismus muss also mit der Länge, unabhängig von der Masse, steigen, und zwar, in Uebereinstimmung mit der Erfahrung (p. 358) immer langsamer, je mehr γ zunimmt; setzt man den oben mitgetheilten Versuchen gemäss etwa $\beta = 10$, so bilden die Verhältnisse von μ die Reihe $6 : 7\frac{1}{2} : 8\frac{1}{2}$, wenn die Verhältnisse von γ , also auch von l die Reihe $2 : 3 : 4$ bilden. Die Magnetismen wachsen also für solche Längen langsamer als diese, während sie factisch nach Formel (1) schneller wachsen, und auch für grössere β wäre dies noch der Fall. Daraus ist zu schliessen, dass für die bisher zu Beobachtungen benutzten Magnete $\gamma < 2$ ist, also $\lambda > \frac{l}{2}$. Bei allen diesen Magneten ist also die volle Wechselwirkung nirgends, selbst in der Mitte nicht zur Geltung gekommen. Für solche Stäbe müssen an der obigen Betrachtung zwei Aenderungen vorgenommen werden: das mittlere Stück, und folglich auch das zweite Glied rechts in der Formel (8) fällt fort, und ferner wird α kleiner als vorhin, also jedenfalls $\alpha < \frac{1}{2}$, im übrigen aber von γ abhängig. Es wird dann in der That der Magnetismus von der Länge stärker abhängig als bei grösseren Werthen von γ , und zwar genügt es schon, γ zwischen 1 und 2 zu wählen, um die Formel (1) annähernd zu befriedigen; dass sie aber mit irgend welcher Genauigkeit überhaupt nicht erfüllt wird, habe ich schon bei Anführung der bezüglichen Beobachtungen hervorgehoben, und insbesondere bemerkt, dass in der That, wie die Theorie es nunmehr als erforderlich herausstellt, mit wachsender Länge die Zunahme des Magnetismus sich verlangsamt. Hiernach übertrifft der lineare Bereich der magnetischen Längswech-

selwirkung die Grösse der bisher benutzten Stäbe (die längsten waren etwa 1 m lang).

Bei der Analogie der Betrachtungen, welche ich über die Beschreibung des Einflusses der Dicke anzustellen hätte, mit den eben durchgeführten will ich mich auf das Resultat desselben beschränken. Die Dicke hat deshalb unter sonst gleichen Umständen einen schädlichen Einfluss auf den Magnetismus, weil die Querwechselwirkung, welche der äussern Kraft entgegenwirkt, desto vollständiger zur Geltung kommt, je dicker der Stab ist. Ist der Querschnitt kein Kreis, so muss nothwendig der Magnetismus stärker ausfallen, weil die Kreisfläche von allen Flächen gleichen Inhalts die gedrunge-
 un-ber-mer,iltennisse n γ,smenrend auch t zu nutz-Mag-st in Stäbe vor- h das erner rigen agne-seren en 1 riedi-aupt ezüge e be- r als ahme rrifft ech-

ste ist. Indess hat v. Waltenhofen¹⁾ bei prismatischen Stäben von weichem Eisen diesen Unterschied nicht beobachten können.

Uebrigens bleibt weder die Längswirkung noch die Querwirkung bei steigender äusserer Kraft unverändert; vielmehr ergibt eine einfache Betrachtung, auf welche auch Boernstein aufmerksam macht, dass die Längswirkung zunimmt, die Querwirkung abnimmt; vielleicht erklärt sich das negative Ergebniss v. Waltenhofen's aus diesem Umstande.

Schliesslich ist ersichtlich, dass, wenigstens für kleine Kräfte, die Vergrösserung der Querwirkung durch Vergrösserung des Querschnittes demselben Gesetze unterworfen sein muss wie die Vergrösserung der Längswirkung durch Vergrösserung der Länge. Denn in einem unmagnetischen Stabe hat der Begriff der Längs- resp. Querrichtung des Stabes durchaus nichts mit der Längs-, resp. Querrichtung der Molecüle zu thun, wie die Fig. 6 Taf. IV lehrt; von der letztern hängt aber ausschliesslich jenes Gesetz ab. Es folgt hieraus der in der That durch die Erfahrung bestätigte und p. 358 hervorgehobene Satz, dass der temporäre Magnetismus cylindrischer Stäbe gleicher Gestalt von ihrer Grösse nicht abhängt. Bei fortschreitender Magnetisirung freilich muss, vom theoretischen Gesichtspunkte aus, ein sol-

1) v. Waltenhofen, Pogg. Ann. 121. p. 450. 1864.

cher Einfluss sich geltend machen; denn mehr und mehr werden dann die in der Längsrichtung des Stabes benachbarten Molecüle einer bestimmten, und die in der Querrichtung des Stabes benachbarten Molecüle einer andern bestimmten gegenseitigen Lage sich nähern; und für diese beiden Lagen ist das Gesetz der Wechselwirkung ein ganz verschiedenes; jedoch lassen die Beobachtungen nicht erkennen, ob wirklich jener Satz desto genauer zutrifft, je geringer die Magnetisirungen sind.

Zu weiterer Aufklärung über die Theorie der drehbaren Molecularmagnete halte ich, neben den Beziehungen zwischen magnetischen, mechanischen und thermischen Erscheinungen die Gesetze des remanenten Magnetismus für geeignet, insbesondere aber werde ich meine Aufmerksamkeit auf den noch sehr wenig beachteten Vorgang der magnetischen Nachwirkung unter den einfachsten Bedingungen richten und über die Ergebnisse demnächst Bericht erstatten.

Breslau, 12. Juli 1880.

II. *Neue Untersuchungen über den Magnetismus;* *von C. Baur.*

Einleitung.

Man habe irgend ein homogenes magnetisches Feld und bringe in dasselbe eine magnetisirbare Masse vom Volumen V . Ist X die Grösse der magnetisirenden Kraft in jedem Punkte des Feldes, M das in der Masse V erzeugte magnetische Moment, so setzt man $M = k V X$, oder, wenn $V = 1$, $M = k X$. k ist eine Zahl und wird die Magnetisirungsfunktion genannt. Diese ist also der Quotient aus dem in der Masse erzeugten magnetischen Moment M durch die magnetisirende Kraft X , die dieses Moment erzeugt.

Die Magnetisirungsfunktion war der Gegenstand einer sehr eingehenden Untersuchung, und es liegen über sie eine Reihe von Abhandlungen vor von W. Weber, G. Wiedemann, Quintus Icilius, Kirchhoff, Stoletow etc.

Im Sommer 1878 machte ich eine neue Bestimmung der Magnetisirungsfuction mit einem Eisenringe, wie Stoletow, und erhielt eine ähnliche Reihe wie dieser. Als ich die Bestimmungen der verschiedenen Beobachter miteinander verglich, fiel mir das Folgende auf: Bei dem Maximum von k war das Moment erhalten mit zwei Ellipsoiden von v. Quintus Icilius $m = 5500$ und $m = 5400$, mit einem Ringe von Stoletow $m = 5500$ und mit meinem Ringe $m = 5400$. Es scheint also das magnetische Moment bei dem Maximum von k für alle Eisensorten dasselbe zu sein.

Sämmtliche frühere Arbeiten erstrecken sich nur über einen kleinen Bereich hinsichtlich der Grösse der magnetisirenden Kraft. Mit sehr kleinen Kräften hat nur Riecke¹⁾ experimentirt, aber keine Resultate erhalten.

Es war daher wünschenswerth, für ganz kleine magnetisirende Kräfte den Werth der Magnetisirungsfuction zu bestimmen, und dies ist im ersten Theile der vorliegenden Untersuchung geschehen.

Ebenso war es wünschenswerth, den Einfluss der Temperatur auf den Verlauf der Magnetisirungsfuction zu untersuchen, worüber noch gar nichts systematisch und planmässig gearbeitet worden ist. Der zweite Theil dieser Arbeit vervollständigt die Kenntniss der Natur der Magnetisirungsfuction auch in dieser Hinsicht.

Ueber die Abhängigkeit des temporären Magnetismus von der Temperatur liegen überhaupt nur einige sich widersprechende Angaben vor.

Nach Kupffer²⁾ ist das temporäre magnetische Moment bei höheren Temperaturen grösser als bei kleineren. Nach Faraday³⁾ zeigt weiches Eisen, von 0° auf 140° erwärmt, kaum eine Abnahme des temporären magnetischen Moments, Nickel eine bedeutende Abnahme, während Kobalt eine deutliche Zunahme zeigt. Beide Beobachter benutzten den Erdmagnetismus als magnetisirende Kraft.

1) Riecke, Pogg. Ann. **141**. p. 433. 1870; **149**. p. 453. 1873.

2) Kupffer, Kastner's Archiv **6**. 1825.

3) Faraday, Exp. Res. Ser. **30**. § 3424. 1855.

Diesen Angaben widersprechen die von G. Wiedemann.¹⁾ Er findet nämlich, dass immer bei der ersten Temperaturänderung, gleichviel ob diese in einer Erwärmung oder einer Abkühlung besteht, der temporäre Magnetismus der Eisenstäbe zunimmt.

Die Magnetisirungsform wird am einfachsten nach der von Kirchhoff²⁾ angegebenen Methode bestimmt, indem man einen Eisenring von kreisförmigem Querschnitt mit Draht umwickelt und magnetisirt. Dabei ist die magnetisirende Kraft zu berechnen aus:

$$X = \frac{2m_1 I L}{r^2 \pi},$$

wo m_1 die Zahl der Drahtwindungen im Magnetisirungskreise bedeutet, I die Stromstärke, r den Radius des Querschnittes des Eisenringes und $L = \int \frac{df}{r} = 2\pi (\varrho_0 - \sqrt{\varrho_0^2 - r^2})$, wo ϱ_0 der Radius der kreisförmigen Axe des Eisenringes bedeutet.

Eine zweite Strombahn mit einer anderen Windungslage und einem Galvanometer dient als inducirte Strombahn. Durch Umwenden des magnetisirenden Stromes werden in dieser Bahn Inductionsströme erzeugt, die man zu messen hat.

Dann ist die Magnetisirungsfunction zu berechnen nach der Formel:

$$k = \frac{w}{16 m_1 m_2 L \pi} \cdot \frac{j}{I} - \frac{L_1}{4 \pi L}$$

wo bedeuten:

w den Widerstand in der inducirten Strombahn,

m_2 die Zahl der Windungen in eben derselben,

j die Stromstärke des Integralstromes und

L das Integral $\int \frac{df}{\varrho}$, zu erstrecken über den Querschnitt einer inducirten Windung.

Der inducirende Stromkreis geht von den Elementen nach einer Wippe (1), über den Ring nach (1) zurück, sodass man mit (1) den Strom im Ringe umkehren kann, von (1)

1) Wiedemann, Galv. 2. p. 604, 606, 607. 1873.

2) Kirchhoff, Pogg. Ann. Ergbd. 5. p. 1. 1870.

weiter zur Wippe (2), über das Galvanometer nach (2) zurück, sodass durch Umlegen von (2) der Strom im Galvanometer umgekehrt werden kann, und endlich von da nach den Elementen zurück. Der inducirte Kreis ist weit einfacher; er enthält nur den Ring und das Galvanometer.

Dasselbe besteht aus zwei Rollen mit 370 Windungen, die parallel dem magnetischen Meridian zu einem Multiplikator zusammengestellt sind. In ihrem Mittelpunkt hängt an einem Coconfaden ein Magnet mit Spiegel. Die Stromstärke wird mit nur einer Windung gemessen, die zwischen den beiden Rollen liegt, während der Integralstrom mit diesen beiden Rollen gemessen wird. Für das Galvanometer ist der mittlere Radius $R = 163,2$ mm, die Galvanometerconstante $G = 13,96$, die Schwingungsdauer des Magnets $T = 4,9412^{\text{sec}}$, die halbe Länge des Magnets $l = 21,0$ mm, die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus $H = 1,98$ und das log. Decrement $\lambda = 0,002\,973$.

Die Ablesungen wurden mit Fernrohr und Scala gemacht. Diese wurden so aufgestellt, dass 500 die Ruhelage war. Dann erzeugte man eine Stromstärke, z. B. von 20 mm Ausschlag, so dass das Fadenkreuz auf 520 stand. Wurde die Wippe (1) plötzlich umgelegt, so entstand ein Integralstrom. Las man für diesen den ersten Ausschlag, z. B. bei 600 ab, so war der Integralesschlag also $= 80$ mm. Nachdem der Magnet auf 520 wieder zur Ruhe gekommen war, legte man (1) auf die andere Seite um und las den ersten Ausschlag, z. B. bei 441 ab, sodass der Integralesschlag 79 mm war. Hierauf wurde die Wippe (2) umgelegt, worauf die Ruhelage bei 480,5 war, worauf man dann auf die eben beschriebene Art die Wippe (1) zweimal umlegte. So hatte man 4 Ablesungen für den ersten Ausschlag des Integralstromes, und die Fehler, die von der Aufstellung herrühren, sind so gut wie möglich eliminirt. Diese Gruppe von Beobachtungen wurde dann mehrere mal wiederholt und aus sämtlichen Ablesungen das Mittel genommen. Bezeichnet man mit u den Winkel, der dem ersten Ausschlag des Integralstromes entspricht, mit U denjenigen, der dem Ausschlage der Stromstärke entspricht, so ist:

$$j = \frac{TH}{G\pi} (1 + q) \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \cdot 2 \sin \frac{u}{2},$$

wo q der Quotient aus der Torsionsconstante durch MH ist und:

$$I = \frac{RH}{2\pi} (1 + q) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{l^2}{R^2}\right) \cdot \text{tg } U.$$

Die Widerstände wurden mit der Wheatstone'schen Brückenmethode gemessen und auf absolute Einheiten reducirt. Dabei wurde nach Hrn. Prof. H. F. Weber's neuester Bestimmung des Werthes der Siemens'schen Quecksilber-einheit in absolutem Maasse ¹⁾ angenommen:

$$1 (S. Q. E) = 0,9550 \cdot 10^{10} \left(\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right)$$

— Um sehr starke Ströme noch messen zu können, war man genöthigt, vor das Galvanometer eine Brücke zu legen. Ist w_1 der Widerstand in dieser, w_2 der Widerstand der inducirenden Leitung von einem Ende der Brücke über das Galvanometer zum andern, I die Stärke des ganzen Stromes, I_2 die Stärke desjenigen Theiles, der durch's Galvanometer geht, so erhält man I nach der Formel:

$$I = \left(1 + \frac{w_2}{w_1}\right) I_2$$

I. Ueber den Verlauf der Magnetisirungsfuction für sehr kleine magnetisirende Kräfte.

Für den Ring war $r = 10,13$ mm und $\varrho_0 = 94,32$ mm, für die erste Windungslage $m_1 = 318$ und $r = 11,61$, für die zweite $m_1 = 300$ und $r = 12,99$; die dritte hatte Gruppen von 100, 50, 50, 30 und 10 Windungen, und es war für sie $r = 14,42$.

Es wurde experimentirt mit $m_1 = 318$ und $w = 6,0468 \cdot 10^{10} \left(\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right)$. Dabei war $L_1 = 3,5844$ und $L = 4,5238$. Die k und X wurden berechnet nach den Formeln (die eingeklammerten Zahlen sind Logarithmen):

$$k = [1,08095] \cdot \frac{2 \sin \frac{u}{2}}{\text{tg } U} - 0,10 \text{ und } X = [2,53655] \cdot \text{tg } U.$$

1) Weber, Vierteljahrsschrift d. Züricher nat. Ges. 3. p. 1. 1877.

Es wurde die folgende Reihe gefunden:

I	j	m_2	X	k	m
3,03	4,17	500	0,1580	16,46	2,63
4,79	7,07		0,3081	17,65	5,47
9,49	18,21		0,7083	23,00	16,33
16,67	40,17		1,3188	28,90	38,15
26,32	84,36	100	2,3011	39,81	91,56
46,30	45,10		2,8422	58,56	224,87

Dabei sind I und j die unmittelbar abgelesenen Ausschläge für die Stromstärke und den Integralstrom.

Um möglichst sichere Resultate zu erhalten, wurde diese Reihe noch einmal wiederholt und das Folgende gefunden:

I	j	m_2	X	k
1,55	2,30	500	0,130	15,50
10,07	15,44		0,847	18,38
11,24	19,21		0,946	20,49
22,15	46,29		1,864	25,07
34,50	98,01		2,903	32,40
40,40	118,44		3,397	35,20

Beide Reihen stimmen ziemlich gut mit einander überein. Stellt man sie graphisch dar, indem man die X als Abscissen, die k als Ordinaten aufträgt, so erhält man eine Linie, die ziemlich gerade ist. Verlängert man sie nach rückwärts, bis sie die Ordinatenaxe trifft, so erhält man auf dieser die Ordinate für die Abscisse $X = 0$. Aus beiden Reihen erhält man für diese Ordinate den Werth $k = 15,0$. Man hat also gefunden, dass für die magnetisirende Kraft $X = 0$ die Magnetisirungsfuction einen **positiven** Werth hat.

Der Zusammenhang zwischen X und k ist für diese kleinen Werthe der magnetisirenden Kraft ein sehr einfacher, nämlich:

$$k = 15,0 + 10,0 \cdot X,$$

somit der zwischen X und M :

$$M = 15,0 \cdot X + 10,0 \cdot X^2,$$

d. h. die Curve für das Moment beginnt mit einem Parabelbogen.

II. Einfluss der Temperatur auf den Verlauf der Magnetisirungsfuction.

Der Ring wurde in einem doppelwandigen Eisengefäße aufgehängt, das man mit einem Bunsen'schen Brenner erhitzen konnte. So war es möglich, die Temperatur der den Ring umgebenden Luft bis auf 150° zu steigern und stundenlang beinahe constant zu erhalten.

Ring und Beobachtungsmethode waren dieselben wie in der vorhergehenden Untersuchung. Die unveränderliche Distanz von Spiegelrohr und Scala betrug 2130 mm. Bei jeder Temperatur wurden 20 Integralströme abgelesen und dabei die Temperatur so constant gehalten, dass sie sich nur um Zehntelgrade veränderte. Es wurde jedesmal mit Zimmertemperatur begonnen, dann auf 50° erhitzt, dann auf 100° und 150° . Es genügte, bei einer bestimmten Temperatur $\frac{1}{2}$ Stunde zu warten, bis der Ring durch seine ganze Masse hindurch diese Temperatur angenommen hatte. Zur Ablesung war ebenfalls $\frac{1}{2}$ Stunde nöthig.

Eine sehr ausgedehnte Untersuchung wurde vorgenommen bei der magnetisirenden Kraft, welche der Stromstärke mit dem Ausschlag an der Scala von $I = 60$ mm entspricht. Es wurden 20 Reihen gemacht, für je 4 Temperaturen: 16° , 50° , 100° und 150° . Dann wurden verschiedene andere Beobachtungsreihen gemacht bei verschiedenen magnetisirenden Kräften. In der folgenden Tafel ist für $I = 60$ das Mittel sämmtlicher 20 Beobachtungen und für jede andere magnetisirende Kraft jede einzelne Beobachtung angeführt.

I	m_2	t	j	t	j	t	j	t	j
60	200	15,8°	362,7	52,5°	396,1	100,4°	430,2	147,0°	457,5
100	30	17,0	263,1	53,0	275,4	101,0	297,6	—	—
300	20	14,4	418,1	51,3	420,1	100,8	421,8	149,4	422,3
200	20	22,0	343,3	52,4	352,7	100,3	361,5	143,0	366,9
100	20	14,6	180,1	52,5	184,7	100,4	194,6	149,8	211,9
10	500	15,4	30,26	49,8	32,00	100,5	33,30	151,5	34,44
20	500	14,6	111,9	53,0	130,8	98,2	139,6	—	—
25	500	14,8	202,5	53,0	207,7	100,5	221,7	—	—
20	500	—	—	53,0	134,7	100,4	138,6	130,0	142,6
100	20	16,6	180,4	50,4	183,0	101,0	191,7	150,0	206,6

<i>I</i>	<i>m</i> ₂	<i>t</i>	<i>j</i>	<i>t</i>	<i>j</i>	<i>t</i>	<i>j</i>	<i>t</i>	<i>j</i>
200	20	16,1°	325,5	50,8°	332,3	100,6°	345,3	121,2°	345,0
300	10	17,6	197,1	52,6	197,5	102,2	198,5	140,0	199,5
500	20	15,4	437,4	50,3	437,5	100,7	435,3	148,1	432,5
500	20	15,1	438,3	50,5	437,0	100,7	434,7	161,1	429,8
400	20	18,8	420,5	50,9	420,5	100,0	419,5	148,0	417,5
500	20	16,0	438,0	50,3	436,0	99,6	432,0	153,0	428,5
500	20	15,5	441,0	54,0	438,0	101,5	433,0	151,2	428,0
800	20	15,0	462,0	49,8	459,0	100,2	452,0	151,0	446,0
800	20	17,0	462,0	52,0	458,5	100,1	454,0	150,1	448,0
800	20	15,8	461,5	50,2	458,5	99,5	453,5	145,1	449,5
400	20	20,2	483,0	52,1	481,0	100,2	476,0	147,5	471,0
400	20	17,8	495,0	52,0	492,5	100,0	489,0	146,3	484,5
500	20	18,4	526,0	49,5	525,0	100,2	521,0	152,1	515,0
500	20	16,0	521,0	52,2	518,1	100,3	514,2	150,1	508,1

Bei den 4 letzten Beobachtungen war vor das Galvanometer eine Brücke gelegt, für welche $1 + \frac{w_2}{w_1} = 4,2553$ war, und bei den zwei letzten war $m_1 = 618$.

Für jedes m_2 waren die Widerstände der inducirten Leitung bei Zimmertemperatur und 100° nach der Wheatstone'schen Brückenmethode bestimmt worden und für 50° und 150° deren Werthe durch Interpolation gesucht.

Es wurden dann alle einzelnen Beobachtungen für jede einzelne magnetisirende Kraft zusammengestellt und das Mittel aus allen Ablesungen bei Zimmertemperatur, 50° u. s. w., sowie aus den zugehörigen Integralesschlägen genommen und nach den Formeln:

$$k = [2,865\ 9676] \cdot \frac{1}{m_2 \operatorname{tg} U} \cdot 2 w \sin \frac{u}{2} - 0,10$$

und:

$$X = [2,53655] \cdot \operatorname{tg} U$$

die Magnetisirungsfunktion k für jede Temperatur, sowie die zugehörige magnetisirende Kraft X berechnet.

Die Resultate, geordnet nach der Grösse der Kraft X , sind in der nachfolgenden Tafel zusammengestellt.

Betrachtet man die Werthe von k für jede einzelne magnetisirende Kraft, wie sie bei den verschiedenen Temperaturen, Zimmertemperatur, 50°, 100° und 150° gefunden wurden, so sieht man, dass bis zu $X = 24,106$ die k mit steigender Temperatur zunehmen, der Zuwachs pro 1° Temperaturerhöhung mit wachsendem X immer kleiner wird.

I	m_2	t	j	w	k	X
10	500	15,4 ⁰	30,26	6,3947	28,3216	0,8072
		49,8	32,00	6,4158	30,0000	
		100,5	33,30	6,7379	32,8640	
		151,5	34,40	6,9438	35,0080	
20	500	14,6	119,0	6,3907	55,72	1,614
		53,0	132,8	6,5483	63,72	
		99,2	139,0	6,7338	68,78	
		130,0	142,6	6,8590	71,97	
25	500	14,8	202,5	6,3915	75,82	2,015
		53,0	207,7	6,5483	79,72	
		100,5	221,7	6,7379	87,52	
		—	—	—	—	
60	200	15,8	362,7	5,8942	129,47	4,846
		52,5	396,1	5,9410	142,28	
		100,4	430,2	6,0043	155,87	
		147,0	457,5	6,0648	167,15	
100	20	15,4	180,0	5,5252	364,38	8,072
		51,5	183,3	5,5390	371,96	
		100,5	194,2	5,5586	395,37	
		139,0	205,6	5,5734	419,55	
200	20	19,0	334,4	5,5267	337,13	16,114
		51,1	342,5	5,5390	345,99	
		100,4	353,4	5,5586	358,13	
		131,0	356,0	5,5703	361,47	
300	20	16,0	406,1	5,5254	273,80	24,106
		51,9	407,6	5,5392	275,33	
		101,5	409,4	5,5590	277,68	
		144,7	410,6	5,5752	279,30	
400	20	18,8	420,5	5,5260	212,35	32,02
		50,9	420,5	5,5386	212,62	
		100,0	419,5	5,5580	213,10	
		148,0	417,5	5,5770	212,84	
500	20	15,5	438,8	5,5252	177,90	39,84
		51,2	437,2	5,5388	177,70	
		100,7	434,0	5,5588	177,06	
		152,6	430,2	5,5786	176,29	
800	20	16,0	461,8	5,5254	119,18	62,47
		51,0	458,6	5,5390	118,66	
		100,0	453,2	5,5584	117,72	
		150,0	447,7	5,5777	116,79	
*400	20	19,0	489,0	5,5260	57,70	136,25
		52,1	486,7	5,5392	57,58	
		100,2	482,5	5,5586	57,31	
		146,7	477,7	5,5769	56,94	
*500	20	17,2	523,5	5,5258	25,486	328,77
		50,8	521,5	5,5385	25,448	
		100,1	519,0	5,5586	25,423	
		151,2	511,5	5,5783	25,157	

Bei $X = 32,02$ wächst k ganz wenig von $18,8^\circ$ bis $100,0^\circ$ und nimmt dann ab, sodass es bei $148,0^\circ$ kleiner ist als bei $100,0^\circ$. Geht man zu der nächstfolgenden Gruppe mit $X = 39,84$, so sieht man, wie von $15,5^\circ$ an die Magnetisirungsfunction stetig abnimmt. Für noch grössere magnetisirende Kräfte nimmt mit steigender Temperatur k ebenfalls ab.

Aus diesen Beobachtungen erhält man also die interessanten Resultate:

1) Der Temperatureinfluss auf die Grösse und den Verlauf der Magnetisirungsfunction ist abhängig von der Grösse der magnetisirenden Kraft.

2) Bis zu einer gewissen magnetisirenden Kraft wird mit wachsender Temperatur bei derselben magnetisirenden Kraft die Magnetisirungsfunction grösser. Bei noch grössern magnetisirenden Kräften nimmt sie dann mit wachsender Temperatur ab.

3) Je kleiner die magnetisirende Kraft ist, desto grösser ist der Einfluss der Temperatur auf die Magnetisirungsfunction.

Es wurde, nun versucht, die Magnetisirungsfunction k bei irgend einer Temperatur t_2 durch den Werth k_1 bei irgend einer andern Temperatur t_1 und eine Function der Temperaturdifferenz $t = t_1 - t_2$ darzustellen. Als eine solche Function wurde genommen:

$$k = k_1 (1 + q_1 t + q_2 t^2).$$

Bei jeder magnetisirenden Kraft waren nun 4 Werthe von k bei den 4 verschiedenen Temperaturen beobachtet worden. Daraus wurden nach dieser Form 6 Gleichungen aufgestellt und nach der Methode der kleinsten Quadrate aus diesen die Coëfficienten q_1 und q_2 berechnet. Die nachfolgende Tabelle enthält in der ersten Spalte die X und in den folgenden die zu jedem X gehörenden Coëfficienten q_1 und q_2 .

X	$10^6 q_1$	$10^7 q_2$	X	$10^6 q_1$	$10^7 q_2$
1,607	+2400	+44	32,02	+ 22	+05
4,84	+1944	+20	39,84	- 65	+04
8,07	+1167	+057	62,47	-150	+02
16,11	+ 651	+025	136,25	-100	+0
24,10	+ 158	+012	328,77	- 85	+0

Der Coëfficient q_1 nimmt also mit wachsendem X immer ab und wird gleich Null ungefähr bei $X = 36$ und dann negativ. Bei ungefähr $X = 62$ erreicht er ein Minimum, um dann der Null oder einem Grenzwerthe zuzustreben. Der Werth q_2 hingegen bleibt immer positiv.

Es wurde nun versucht, zwischen den beiden Coëfficienten q_1 und q_2 und der magnetisirenden Kraft X eine Beziehung aufzustellen. Für q_1 war die der Wahrheit am nächsten kommende $a - bX = q_1 X$. Die Werthe von X und die zugehörigen q_1 wurden in diese Form eingesetzt und aus den entstehenden Gleichungen a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. So fand man $a = 0,005\ 685$ und $b = 0,000\ 112\ 2$.

Als passendste Form für q_2 wurde gefunden $q_2 c = X$, wo $c = 0,000\ 007\ 2$. Berechnet man umgekehrt aus a , b und X die q_1 , so sind diese nicht wesentlich verschieden von denen der Tafel. Nur tritt der Zeichenwechsel erst ein bei $X = 50$. Ebenso sind die aus c und X berechneten q_2 nicht wesentlich von denen der Tafel verschieden. Die so berechneten q_1 sind etwas kleiner, die q_2 etwas grösser als die q_1 , resp. q_2 der Tafel, sodass der eine Fehler den andern vermindert.

Somit ist der Zusammenhang zwischen k , X und t der folgende:

$$k = k_1 \left(1 + \frac{a - bX}{X} \cdot t + \frac{c}{X} \cdot t^2 \right),$$

wobei $a = 0,005\ 685$, $b = 0,000\ 112\ 2$ und $c = 0,000\ 007\ 2$.

Hat man also bei irgend einer magnetisirenden Kraft die Function k_1 bei der Temperatur t_1 bestimmt, so kann man nach dieser Formel die Magnetisirungsfuction k bei derselben magnetisirenden Kraft X und irgend einer andern Temperatur t_2 aus k_1 , X und der Temperaturdifferenz $t_1 - t_2 = t$ annähernd berechnen.

III. Magnetisirbarkeit des Eisens bei sehr hohen Temperaturen.

Ueber diesen Gegenstand liegen verschiedene Angaben vor, meistens von älteren Physikern, die glühende Eisenstangen dem Erdmagnetismus aussetzten. So kannten sie

die folgenden Eigenschaften der Magnete: 1) Die Magnete verlieren ihre Kraft im Feuer¹⁾; 2) Magnetische Eisen- und Stahlstäbe werden, wenn sie weissglühend sind, vom Magnet nicht angezogen und wirken nicht auf die Magnetnadel²⁾; 3) Wenn die Gluth etwas nachlässt, so treten die magnetischen Wirkungen auf (nach Brugmans und Cavallo erst, wenn der Stab aufhört, im Tageslichte rothglühend zu sein). Der Stab erhält während des Abkühlens Magnetismus der Lage. In der Richtung des magnetischen Aequators abgekühlt, erhält der Stab keinen Magnetismus.³⁾

Scoresby⁴⁾ fand diese Thatsachen von neuem und zeigte, dass heisse Eisenstäbe durch den Erdmagnetismus stärker magnetisch werden als kalte. Seebeck⁵⁾ gibt an, dass weissglühendes Eisen des Magnetismus unfähig sei, und dieser erst bei Rothgluth auftrete. Aehnliche Angaben machen Fox, Faraday, Matteucci u. a. Mauritius⁶⁾ lässt einen weissglühenden Eisenstab in einer Magnetisirungsspirale sich abkühlen und beobachtet die Ablenkung eines magnetischen Spiegels, die ihm ein Maass des Magnetismus gibt. So findet er, dass das Eisen bei Rothgluth plötzlich magnetisch wird, was schon Fox⁷⁾ angibt.

Diese Angaben sind deswegen unvollständig, weil die Grösse der magnetischen Kraft nicht in Rechnung gezogen wurde, wie meine nachfolgende Untersuchung zeigen wird.

Diese wurde genau in derselben Weise und mit demselben Galvanometer ausgeführt wie die Bestimmung der Magnetisirungsfuction, nur dass an Stelle des umwickelten

1) Gilbert, de magnete, p. 66. London 1600; Servington Savery, Phil. Trans. Nr. 214. p. 314. 1730; Boyle u. Lemmery, Mém. de l'Acad. de Paris. p. 131. 1706.

2) Brugmans phil. Versuche über die magn. Materie, übersetzt v. Eschenbach, Leipz. 1784. Cavallo, Abh. v. Magneten. p. 191. Leipz. 1788.

3) Du Fay, Mem. de l'Acad. p. 361; Servington Savery.

4) Scoresby, Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. 9. p. 254.

5) Seebeck, Pogg. Ann. 10. p. 47. 1827.

6) Mauritius, Pogg. Ann. 120. p. 385. 1863.

7) Fox, Phil. Trans. 7. 1835.

Eisenringes ein Eisenstab und eine Magnetisirungsspirale genommen wurden. Die Stäbe hatten eine Länge von 300 mm und eine Dicke von etwa 8 mm, die sich aber durch fortwährendes Glühen beträchtlich verminderte. Sie wurden an einem Platindraht in eine verticalstehende Magnetisirungsspirale von 500 mm Länge gehängt, sodass diese sie oben und unten um 100 mm überragte und sie einem nahezu homogenen Kraftfelde ausgesetzt waren. Die Spirale hatte 6 Windungslagen von je 236 Windungen. Die 4 innern wurden als inducirende, die 2 äussern als inducirte genommen. Der Stab wurde weissglühend in die Magnetisirungsspirale gehängt. Während er sich dann rasch abkühlte, wurden durch Umkehren des inducirenden Stromes so rasch hintereinander als möglich Integralströme beobachtet. Diese gaben dann ein relatives Maass des magnetisirenden Momentes im Momente des Umkehrens oder bei einer bestimmten Temperatur. Von jedem abgelesenen Integralstrom musste noch die Wirkung der inducirenden Windungen auf die inducirten abgezogen werden, um den reinen Effect des temporären Magnetismus zu bekommen.

Die Stäbe wurden in einem Kohlenbecken erwärmt. Ein Windflügel wurde durch einen Schmid'schen Motor in Bewegung gesetzt. Der entstehende Luftstrom wurde in eine Röhre geleitet, die mit Löchern versehen war, die auf eben solche im Kohlenbecken passten. Auf diese Weise war es leicht, die Stäbe in Weissgluth, ja bis zum Schmelzen zu bringen.

Von einer grossen Anzahl gemachter Beobachtungen führe ich nur einige wenige an. Zuerst wurde mit einer kleinen magnetisirenden Kraft, nämlich derjenigen, die von einem Daniell'schen Element in der Spirale hervorgebracht wurde, experimentirt. Ich führe zwei Reihen an, die mit demselben Stabe gemacht wurden.

	$z = \frac{1}{4} \text{ m}$	$\frac{1}{2} \text{ m}$	1 m	5 m	15 m
Reihe I.	$j = 0, 0, 3;$	13, 13;	12, 10, 10, 10;	9, 9;	9, 9.
	$z = \frac{1}{4} \text{ m}$		1 m		15 m
Reihe II.	$j = 0, 0, 2;$	12, 12, 12, 11, 11;	10, 10, 9, 9, 9.		

Hiebei bedeutet j den Integralesschlag, resp. den relativen Werth des Magnetismus, und z die Zeitdifferenz zwischen je zwei aufeinander folgenden Ablesungen. Die j sind in verschiedene Gruppen zusammengefasst, über welchen jedesmal ein Werth von z steht, welcher die Zeitdifferenz für je zwei aufeinanderfolgende j dieser Gruppe bedeutet. Aus der Zeit der Ablesung kann man dann einen Rückschluss auf die Temperatur machen.

Bei der ersten Reihe z. B. ist der erste, bei der höchsten Temperatur abgelesene Integralstrom gleich Null. $\frac{1}{4}$ m später, also bei einer etwas tiefern Temperatur, wurde der zweite $j = 0$ abgelesen, und wieder $\frac{1}{4}$ m später $j = 3$; dann $\frac{1}{2}$ m später $j = 13$ und noch $\frac{1}{2}$ m später $j = 13$ u. s. w.

Man sieht also, dass bei der höchsten Temperatur der Magnetismus gleich Null ist, mit sinkender Temperatur aber sehr schnell wächst und dann bei kleineren Temperaturen wieder abnimmt. Kehrt man dies um, so hat man den Satz:

Für **kleine** magnetisirende Kräfte **nimmt** das temporäre magnetische Moment mit steigender Temperatur **rasch zu**, erreicht bei Rothgluth ein Maximum und sinkt dann plötzlich auf Null herab.

Bei Anwendung grösserer magnetisirender Kräfte war es nicht möglich, den ersten abgelesenen Integralesschlag $j = 0$ zu bekommen. Mit einer magnetisirenden Kraft in derselben Spirale durch 10 Bunsen'sche Elemente hergestellt, erhielt ich die folgenden Reihen:

	$z = \frac{1}{4}$ m	$\frac{3}{4}$ m	1 m	5 m	10 m
Reihe I.	$j = 7, 120;$	$285;$	$293, 296;$	$303;$	$303, 303, 303.$

	$z = \frac{1}{4}$ m	1 m	5 m	20 m
Reihe II.	$j = 7, 30;$	$282, 288, 288;$	$294;$	$296, 297, 297.$

Diese Reihen ergeben den Satz:

Für **grosse** magnetisirende Kräfte **nimmt** das temporäre magnetische Moment mit wachsender Temperatur **allmählich** ab und fällt bei Rothgluth plötzlich auf einen sehr kleinen Werth herunter.

Wahrscheinlich verschwindet bei noch stärkerer Gluth der Magnetismus vollständig.

Aus einer grossen Anzahl von Versuchen wurde das erste Auftreten des temporären Magnetismus bei **sehr heller Rothgluth** bestimmt, und zwar war diese bei Anwendung **grösserer** magnetisirender Kräfte **eine hellere** als bei **kleinern**.

Wie plötzlich die Zunahme des temporären Magnetismus bei der hellen Rothgluth erfolgt, zeigte z. B. die letzte Reihe II. Der erste Integralesschlag war $j = 7$, der $\frac{1}{4}$ m später abgelesene $j = 30$. Als nach der Dauer einer Schwingungszeit das Fadenkreuz auf den Nullpunkt zurückgekommen war, um nach der andern Seite zu gehen, sollte der Magnet durch einen entgegengesetzten Integralstrom plötzlich zur Ruhe gebracht werden. Statt dessen wurde er aber weit zurückgeschleudert, was beweist, dass dieser Integralesschlag, der 5^{ter} nach dem zweiten erfolgte, bedeutend grösser als dieser war, den er aufheben sollte. Der Punkt, wo dasselbe geschah, ist in den folgenden Reihen mit einem Sternchen bezeichnet.

$z = \frac{1}{4} \text{ m} \quad \frac{1}{2} \text{ m} \quad 1 \text{ m} \quad 15 \text{ m}$

Reihe I. $j = 0, 0, 21, *; 132, 132, 133; 134, 135; 138, 138.$

$z = \frac{1}{4} \text{ m} \quad 1 \text{ m} \quad 15 \text{ m}$

Reihe II. $j = 0, 1, *; 130, 132, 132, 132; 132, 132.$

$z = \frac{1}{4} \text{ m} \quad 2 \text{ m} \quad 5 \text{ m}$

Reihe III. $j = 0, 0, 47, *; 132, 133; 135, 135.$

IV. Das Gore'sche Phänomen.

G. Gore¹⁾ theilt mit, dass, wenn ein Eisendraht erhitzt wird, er sich bei mittlerer Rothgluth plötzlich verlängert, und dass, wenn ein glühender Stab sich abkühlt, er sich bei derselben Rothgluth plötzlich zusammenzieht. Diese Erscheinung stimmt überein mit einer andern, die er im Phil. Mag. 40, p. 170—171, 1870 mittheilt, und die ich das Gore'sche Phänomen nennen will.

1) G. Gore, Phil. Mag. 38. p. 59. 1869.

Er schob an das eine Ende eines Eisenstabes eine Magnetisirungsspirale, an das andere Ende eine Inductionsrolle und erhitze ihn in der Mitte. Nimmt dann der Stab Rothgluth an, so verliert er plötzlich einen Theil seines temporären Magnetismus, was die Nadel des Galvanometers im Inductionskreise durch plötzliche Stösse anzeigt. Ist der Stab glühend, und lässt man ihn abkühlen, so nimmt er bei derselben Temperatur plötzlich einen beträchtlichen Magnetismus an, was die Nadel durch entgegengesetzte Stösse anzeigt.

Es ist von Interesse, zu untersuchen, ob das Phänomen von der Grösse der magnetisirenden Kraft abhängig ist, da Gore dies nicht gethan hat.

Der Eisenstab wurde weissglühend in dieselbe Magnetisirungsspirale gehängt, die im vorigen Versuch angewendet wurde. Inducirende und inducirte Leitung waren dauernd geschlossen. Als Galvanometer wurde ein Wiedemann'sches genommen, dessen Magnet aperiodisch gestellt wurde. Von einer grossen Anzahl von Versuchen führe ich nur einige wenige an.

Zuerst wurde mit einer kleinen magnetisirenden Kraft, erzeugt in der Magnetisirungsspirale durch ein Daniell'sches Element, experimentirt. Wegen der grossen Schwingungsdauer des Magnets war es unmöglich, die von Gore beobachteten Stösse von einander zu trennen und ihre Grösse einzeln zu bestimmen. Dagegen wurde ihre Summe, der grösste Ausschlag und die Art der Bewegung ganz genau bestimmt. In der folgenden Tafel sind für diese kleine Kraft zwei Beobachtungen aufgeführt. Die erste Spalte gibt jedesmal den Stand des Fadenkreuzes auf der Scala, die zweite die zugehörige Zeit. Dadurch ist die Bewegung vollständig bestimmt. Ein Sternchen bezeichnet einen Stoss.

Wie die Tafel zeigt, beginnt die Bewegung sehr langsam bei 950, wird dann rascher, einige mal stossweise, und in 15^{sec} ist bei 520 der grösste Ausschlag von 430 mm erreicht. Dann geht das Fadenkreuz rasch bis auf etwa 10 mm Entfernung von der Ruhelage zurück, um diese letzte Strecke noch langsam zurückzulegen. Ganze Zeitdauer = 42^{sec}.

Kleine magnetisirende Kraft				Grosse magnetisirende Kraft			
950	16 m 45 sec	950	19 m 0 sec	990	27 m 55 sec	970	31 m 40 sec
940	—	940	—	980	—	960	49
*	—	*	—	960	8	930	—
*	—	*	—	900	—	900	—
520	17 0	*	—	800	14	800	32 1
700	—	520	15	600	—	600	—
800	10	700	—	430	22	425	10
900	12	800	23	600	28	600	—
935	19	900	27	700	32	700	18
945	21	940	32	800	38	800	27
950	30	950	42	850	46	850	37
				900	58	900	49
				935	28 7	930	33 0
				955	24	950	25
				965	34	960	45
				985	29 15	985	34 5
				990	30 0	970	35

Darauf wurde eine grössere magnetisirende Kraft, von 10 Bunsen'schen Elementen, in der Magnetisirungsspirale erzeugt, angewendet. Auf dem zweiten Theile der obigen Tabelle sind zwei Beobachtungen für diesen Fall mitgetheilt

Wie man sieht, bewegt sich das Fadenkreuz anfangs längere Zeit sehr langsam, erreicht ohne Stösse in 24 und 30 sec den Umkehrpunkt, geht dann rasch wieder zurück und legt die letzte Strecke sehr langsam zurück. Die grössten Ausschläge sind 560 und 545, und die Zeit von Anfang bis Ende 2 m 2 sec und 2 m 55 sec. Die Reihen stimmen deswegen nicht genau mit einander überein, weil am Anfang und am Ende die Bewegung so langsam ist, dass man sie kaum constatiren kann.

Aus diesen Versuchen folgt nun:

1) Mit wachsender magnetisirender Kraft wird das Gore'sche Phänomen intensiver.

2) Seine Zeitdauer wird grösser.

Nebenbei wurde beobachtet, dass:

3) es bei grösserer magnetisirender Kraft bei einer höhern Gluth auftritt.

Darauf wurde bestimmt, bei welcher Gluth das Phänomen beginne und aufhöre und Folgendes constatirt:

4) Das Gore'sche Phänomen tritt bei kleinen

magnetisirenden Kräften bei heller Rothgluth auf und endet mit endendem Glühen.

5) Das Gore'sche Phänomen tritt bei grossen magnetisirenden Kräften bei sehr heller Rothgluth auf und endet, wenn der Stab schon dunkel geworden ist.

Letzterer Versuch führte auf eine Methode, das Eintreten der Magnetisirbarkeit bei höheren Temperaturen zu bestimmen. Die Anordnung war ganz dieselbe, nur dass der Stab abwechselnd in die Spirale eingeschoben und herausgezogen wurde. War er so weit abgekühlt, dass er magnetisch wurde, so zeigte sich im Galvanometer ein Ausschlag, entweder beim Herausziehen oder beim Hereinschieben. Gewöhnlich war der erste beobachtete Ausschlag ≈ 2 mm und der zweite, etwa $\frac{1}{2}$ sec später beobachtete, 20—30 mm. Also nimmt der Magnetismus mit sinkender Temperatur bei seinem ersten Auftreten sehr rasch zu. Es bestätigte sich ebenso, dass bei grösseren magnetisirenden Kräften die Magnetisirbarkeit bei einer etwas höheren Temperatur eintritt als bei kleinerern.

Diese Methode ist sehr scharf, da das Galvanometer so empfindlich gemacht werden kann, dass es die geringsten Spuren von Magnetismus anzeigt.

V. Die Magnetisirungsfuction für electrolytisches Eisen, Eisenfeilspäne und Eisendraht.

Man bediente sich bei dieser Untersuchung derselben Magnetisirungsspirale und desselben Galvanometers wie bei den vorhergehenden Untersuchungen.

Das electrolytische Eisen war ein cylindrisches Stäbchen von 270 mm Länge, einem Durchmesser von 4,0 mm, einem Gewicht von 7,70 g und einem spec. Gewicht von 5,00. Es wurde durch einen ziemlich schwachen Strom während fünf Tagen aus einer Lösung von Eisenvitriol dargestellt. Ein sehr dünner Kupferdraht diente als Kathode.

Die Eisenfeilen war sehr fein. Man schüttete sie in ein Glasrohr, sodass sie ein cylindrisches Stäbchen von 260 mm

Länge, einem Durchmesser von 7 mm und einem Gewicht von 31,30 g bildeten.

Der Eisendraht war aus einem Stück sehr weichem Gärtnerdraht herausgeschnitten, hatte eine Länge von 87 mm, einen Durchmesser von 0,6 mm und einem Gewicht von 0,22 g.

Brachte man diese Stäbchen in eine Magnetisirungsspirale, sodass ihre Axen mit der Axe derselben zusammenfielen, und der Mittelpunkt von Stäbchen und Axe derselbe war, so lagen sie in einem nahezu homogenen magnetischen Kraftfelde von der magnetisirenden Kraft $X = 4\pi I \delta$, wo δ die Dichte der Windungslagen bedeutet und I die Stromstärke.

Als Maass für das in den Stäbchen erzeugte Moment wurde der am Galvanometer abgelesene Ausschlag genommen und dann die Magnetisirungsfuction bestimmt als Quotient vom magnetischen Moment durch die magnetisirende Kraft X . So erhielt man aus den Beobachtungen die folgenden Resultate.

X	Magnetisirungsfuction			X	Magnetisirungsfuction		
	$E. E.$	$E. D.$	$E. F.$		$E. E.$	$E. D.$	$E. F.$
7,29	1,164	0,545	2,466	64,87	1,479	1,279	3,092
14,00	1,215	1,357	2,500	124,75	1,724	0,700	3,000
20,48	1,243	1,756	2,683	336,76	0,979	0,267	1,498
34,82	1,293	1,900	2,914	442,90	0,824	0,198	1,489

Die erste Columne enthält die magnetisirenden Kräfte X , die folgenden die Werthe der Magnetisirungsfuction (in relativem Maass) für electrolytisches Eisen, Eisendraht und Eisenfeilspäne.

Das Maximum der Magnetisirungsfuction für diese drei Eisensorten wird erreicht bei $X = 124$, resp. 34 und 64. Daraus ergibt sich, dass in gewöhnlichem Eisen sehr rasch das Maximum der Magnetisirungsfuction erreicht wird, in Eisenfeilen etwas später und in electrolytischem Eisen sehr spät.

Dies ist das wesentlichste Resultat, das diese Untersuchung ergibt. Man könnte, wie dies oft geschieht, das Moment pro Gewichtseinheit der drei Eisenmassen bestim-

men, um dadurch einen Anhaltspunkt über die Magnetisirbarkeit derselben zu gewinnen. Dies ist aber nicht streng richtig, denn das magnetische Moment hängt nicht nur von der Masse, sondern auch von den Dimensionen des Eisenstückes ab.

III. Ueber die sogenannte unipolare Induction; von Eduard Riecke.

I. Einleitung.

Wilhelm Weber hat sich im Jahre 1839, zu einer Zeit, in welcher die Zurückführung der electrischen Erscheinungen auf ein gemeinsames Grundgesetz noch nicht vollzogen, die Gesetze der Voltainduction noch nicht bekannt waren, mit einer eigenthümlichen Classe von Inductionserscheinungen beschäftigt, welche er als unipolare Induction bezeichnet hat. Die Grundlage seiner Betrachtung ist in den folgenden Sätzen enthalten, welche ich wörtlich seiner wohl nicht allgemein zugänglichen Abhandlung¹⁾ entnehme.

„Es wird die Existenz zweier magnetischer Fluida vorausgesetzt, eines nördlichen und eines südlichen, welche in den Molecülen des Magnets in gleicher Menge vorhanden, aber von einander geschieden sind. Wird ein solcher Magnet bewegt, so wird in einem benachbarten Leiter ein galvanischer Strom nach bekannten Gesetzen inducirt. Dieser Strom ist so beschaffen, dass er in zwei Ströme zerlegt werden kann, von denen der eine durch die Bewegung des nördlichen Fluidums der andere durch die Bewegung des südlichen Fluidums entsteht. Diese Induction zweier Ströme durch die Bewegung beider magnetischer Fluida heisse im allgemeinen eine bipolare Induction. Es ist aber auch eine Induction denkbar, wobei entweder bloß ein magnetisches Fluidum bewegt

1) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im J. 1839, p. 64.

wird, und also der von dem andern Fluidum inducirte Strom stets Null ist oder das andere Fluidum bald positive, bald negative Ströme inducirt, deren Summe Null ist, sodass auch hier blos derjenige Strom bleibt, welcher von dem ersteren Fluidum inducirt wird. Diese Induction eines Stroms durch die Bewegung eines magnetischen Fluidums heisse eine unipolare Induction.“

Denkt man sich nun einen Leiter, welcher die Gestalt eines horizontalen Ringes hat, und bewegt man ein magnetisches Molecül so, „dass es durch den Ring weder ganz, noch gar nicht, sondern halb durch ihn hindurch geht, halb ausser ihm bleibt, z. B. dass diejenige Hälfte, welche nördliches Fluidum enthält, abwärts durch den Ring, aufwärts aussen herum geht, die andere Hälfte aber, welche südliches enthält, immer aussen bleibt,“ so ist die Wirkung im ganzen nicht Null, da das eine Fluidum, welches durch den Ring geht, einen Strom inducirt, welcher durch die Bewegung des anderen Fluidums nicht aufgehoben wird. In der That also erhält man in diesem Falle eine durch die Bewegung nur eines Magnetpoles hervorgerufene, eine unipolare Induction. Um die dabei gemachten Annahmen zu realisiren, kann man einen Stahlcylinder so magnetisiren, dass seine magnetische Axe mit seiner geometrischen zusammenfällt; er wird dann um diese letztere gedreht, während das eine Ende eines Leitungsdrahtes mit seiner Axe, das andere mit seiner Peripherie in Verbindung gebracht wird. Der Leitungsdraht mit dem Cylinder zusammen wird dann einen stets geschlossenen Ring bilden, mit Bezug auf welchen die magnetischen Molecüle die verlangte Bewegung besitzen.

Die Gesetze dieser unipolaren Induction, deren Möglichkeit natürlich an die wirkliche Existenz der magnetischen Flüssigkeiten und ihre räumliche Scheidung in den Molecülen des Magnets gebunden ist, wurden von Weber mit Hülfe des Grundgesetzes der Magnetinduction entwickelt, welches aus dem Biot-Savart'schen Gesetze in folgender Weise abgeleitet werden kann.

Die Kraft, welche ein Stromelement Jds auf einen in

der Entfernung r gelegenen Magnetpol von der Masse $+ \mu$ ausübt, ist gegeben durch:

$$P = \frac{\mu J Ds}{r^3} \sin(r, Ds),$$

oder wenn wir an Stelle des magnetischen Strommaasses das mechanische einführen und dabei die in der Längeneinheit des Leiters enthaltenen Mengen von positiver und negativer Electricität durch e_p und e_n , ihre Geschwindigkeiten durch u_p und u_n bezeichnen:

$$P = \frac{V^2}{c} \cdot \frac{e_p u_p + e_n u_n}{r^2} \mu \sin(r, Ds) \cdot Ds.$$

Hieraus ergibt sich die Kraft H , welche der Pol μ auf die mit der Geschwindigkeit u_p in der Richtung Ds sich bewegende Electricitätsmenge $e_p Ds$ ausübt:

$$H = \frac{V^2}{c} \cdot \frac{\mu e_p Ds \cdot u_p}{r^2} \sin(r, Ds).$$

Dieser Ausdruck würde also die von einem ruhenden magnetischen Theilchen auf ein bewegtes electrisches Theilchen ausgeübte Grundkraft darstellen, wenn den magnetischen Flüssigkeiten eine wirkliche, von den electrischen Theilchen unabhängige Existenz zuzuschreiben sein würde. Gleichzeitig würde dann der Ausdruck:

$$E = \frac{V^2}{c} \cdot \frac{\mu \cdot u_p}{r^2} \sin(r, u_p)$$

die electromotorische Kraft repräsentiren, welche ein ruhender Magnetpol in einem mit der Geschwindigkeit u_p sich bewegendem Leiterelement, oder auch umgekehrt ein in entgegengesetzter Richtung bewegter Pol in einem ruhenden Element inducirte.

Dieser Entwicklung entsprechend, besteht die zwischen einem electrischen und einem magnetischen Theilchen anzunehmende Grundkraft in einem Kräftepaare, dessen Angriffspunkte in die beiden auf einander wirkenden Theilchen zu verlegen sind. Die Richtung der Kräfte ist eine transversale, senkrecht zu der Entfernung und der relativen Bewegungsrichtung der beiden Theilchen liegende. Daraus

ergibt sich, dass diese Kräfte mit dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction nur für translatorische Verschiebungen in Uebereinstimmung sich befinden, nicht für rotatorische.

Die Theorie, welche Weber für die Erscheinungen der unipolaren Induction auf Grund des angegebenen electromotorischen Gesetzes entwickelt hat, schliesst die Vorstellung in sich, dass die im Innern des Magnets befindlichen electrischen Flüssigkeiten an der Rotation desselben keinen Antheil nehmen. Man kann diese Annahme fallen lassen und erhält dann ausser den unipolaren Wirkungen der Weber'schen Theorie noch diejenigen electromotorischen Wirkungen, welche durch die Bewegung der electrischen Flüssigkeiten hervorgerufen werden. Eine Theorie der unipolaren Induction sowie der damit zusammenhängenden Plücker'schen Versuche auf dieser von der Weber'schen abweichenden Grundlage wurde von mir in einem Aufsätze: „Zur Theorie der unipolaren Induction und der Plücker'schen Versuche“¹⁾ mitgetheilt. Diese Theorie führt für die Plücker'schen Versuche zu Resultaten, welche mit den experimentell beobachteten Thatsachen in vollkommener Uebereinstimmung sich befinden, dagegen führt sie zu gewissen Folgerungen, welche in Widerspruch stehen mit dem Grundsatz, dass eine electromotorische Wirkung auf einen Leiter nur dann ausgeübt werden kann, wenn eine relative Bewegung desselben gegen den Inducen ten vorhanden ist.

Zur Prüfung seiner Theorie der unipolaren Induction hat Weber eine Reihe von Versuchen ausgeführt; obwohl zwischen den Resultaten der Beobachtung und der Theorie nicht unbeträchtliche Differenzen auftraten, glaubte Weber, doch auf Grund seiner Versuche zu dem Schlusse berechtigt zu sein, dass durch die Erscheinungen der unipolaren Induction die Alternative zwischen der Theorie der magnetischen Flüssigkeiten und der Ampère'schen Theorie des Magnetismus zu Gunsten der ersteren entschieden werde, eine Auffassung, welcher er in den folgenden Stellen seiner Abhandlung Ausdruck gegeben hat.

1) E. Riecke, Wied. Ann. 1. p. 110. 1877.

„Die Erscheinungen der unipolaren Induction finden zunächst eine interessante Anwendung auf Ampère's electrodynamische Theorie der magnetischen Erscheinungen, oder auf die Frage, ob den beiden magnetischen Fluidis physische Existenz zugeschrieben werden müsse, oder ob überall statt ihrer die Annahme fortdauernder galvanischer Ströme im Innern der Magnete zur Erklärung der Erscheinungen genüge. Zur Erklärung der unipolaren Induction scheint die letztere Annahme nicht zu genügen, während die Annahme von der physischen Existenz zweier magnetischer Fluida nicht allein jene Erklärung zu geben scheint, sondern auch zuerst auf die Betrachtung dieser Erscheinungen geführt hat.“

„Es scheint hiernach vergeblich zu sein, eine Erklärung der unipolaren Induction in Ampère's electrodynamischer Theorie zu suchen, so lange wenigstens, als man bei der Zerlegung galvanischer Ströme in solche Elemente stehen bleibt, die einander in der sie verbindenden geraden Linie anziehen oder abstossen.“

Die Entdeckung der Gesetze der Voltainduction und die im Zusammenhange damit begründeten Vorstellungen über die Natur der galvanischen Strömung führten aber später zu einer rein electrodynamischen Theorie jener unipolaren Induction, und in der dritten Abhandlung über electrodynamische Maassbestimmungen äussert sich daher Weber über die fraglichen Erscheinungen in folgender Weise.

„Ich habe früher in den „Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im J. 1839“ die Vermuthung zu begründen gesucht, dass die daselbst unter dem Namen der „unipolaren Induction“ beschriebenen Erscheinungen zu einer solchen Entscheidung führen könnten. Dies ist aber nicht der Fall, weil eine andere Erklärung von den dort beschriebenen Erscheinungen sich geben lässt, sobald zwischen den im Innern der Conductoren sich bewegendem electrischen Fluidis und den ponderabeln Theilen der Conductoren eine solche Verbindung stattfindet, dass jede auf die electrischen Fluida wirkende Kraft ganz oder fast

ganz auf die ponderabeln Theile übertragen wird, wie ich dies in den „electrodynamischen Maassbestimmungen“¹⁾ näher erörtert habe.“

Weber hat indess diese electrodynamische Theorie der unipolaren Induction nicht weiter verfolgt, er hat insbesondere die Frage offen gelassen, in wie weit die aus derselben sich ergebenden Gesetze mit denjenigen übereinstimmen, welche er auf Grund der Annahme der Existenz der magnetischen Flüssigkeiten abgeleitet, und von welchen er gezeigt hatte, dass sie wenigstens näherungsweise die Erscheinungen darzustellen geeignet sind. Ich habe daher in dem angeführten Aufsätze, dessen Grundlage ebenfalls durch das Gesetz der Magnetinduction gebildet wurde, bemerkt, dass die in demselben enthaltenen Betrachtungen zu ergänzen sind durch eine auf die Gesetze der Electrodynamik zurückgehende Untersuchung, bei welcher die magnetischen Moleküle durch Ampère'sche Molecularströme, die unipolare Induction durch eine Durchbrechung der Leiterbahn durch die Bahn der Ampère'schen Molecularströme zu ersetzen sein würde. Diese Aufgabe ist inzwischen in ihrem wesentlichen Theile durch Lorberg²⁾ gelöst worden; durch die folgenden Bemerkungen soll einerseits seine Untersuchung in einigen Punkten ergänzt, andererseits die Verbindung zwischen zwei von mir in früheren Arbeiten angewandten verschiedenen Betrachtungsweisen hergestellt werden.

II. Theorie zweier rotirender Stromelemente.

Weber hat in den electrodynamischen Maassbestimmungen³⁾ die allgemeine Theorie zweier Stromelemente entwickelt. Seiner Rechnung liegt die Annahme zu Grunde, dass die Geschwindigkeit des bewegten Stromelementes von der besonderen Stelle, welche dasselbe in dem ganzen Leiter einnimmt, unabhängig ist. Diese Annahme ist nur zutreffend, so lange es sich um translatorische Verschiebungen

1) Abh. bei Begründung der k. sächs. Ges. d. Wiss., herausgegeben von d. F. Jabl. Ges. Art. 19. p. 309.

2) Lorberg, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 581. 1878.

3) Weber, I. Abh. Art. 30. p. 362. 1846.

handelt, sie ist unrichtig für rotatorische Bewegungen der Leiter.

Im Folgenden soll nun die Theorie zweier Stromelemente auf eine beliebige rotatorische Bewegung der beiden Stromleiter ausgedehnt werden. Die beiden Stromelemente seien JDs und J_1Ds_1 , die in der Längeneinheit derselben enthaltenen Mengen bewegter positiver und negativer Electricität seien e_p, e_n und e_{p_1}, e_{n_1} ; die Geschwindigkeiten, mit welchen sich diese Electricitäten bewegen:

$$\frac{ds_p}{dt}, \quad \frac{ds_n}{dt} = -\frac{ds_p}{dt}, \quad \frac{ds_{p_1}}{dt}, \quad \frac{ds_{n_1}}{dt} = -\frac{ds_{p_1}}{dt}.$$

Die räumliche Lage der beiden, in rotatorischer Bewegung begriffenen Elemente kann als abhängig betrachtet werden von zwei Parametern π und π_1 , deren Werthe wiederum abhängig sind von der Zeit. Betrachten wir die in den beiden Elementen sich bewegenden Mengen positiver Electricität, so wird ihre Entfernung $r(p, p_1)$ in vierfacher Beziehung eine Function der Zeit sein; einmal, weil diese Electricitäten in ihren Leitungsbahnen s und s_1 in Bewegung begriffen sind, ausserdem aber, weil sie an der rotatorischen Bewegung dieser letzteren Antheil nehmen. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dr(p, p_1)}{dt} &= \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{ds_p}{dt} + \frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{ds_{p_1}}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \pi} \cdot \frac{d\pi}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt}, \\ \frac{d^2r(p, p_1)}{dt^2} &= \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \left(\frac{ds_p}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 r}{\partial s_1^2} \left(\frac{ds_{p_1}}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} \frac{ds_p}{dt} \cdot \frac{ds_{p_1}}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial^2 r}{\partial \pi^2} \left(\frac{d\pi}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 r}{\partial \pi_1^2} \left(\frac{d\pi_1}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial \pi \partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi}{dt} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \pi_1} \frac{ds_p}{dt} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial \pi} \cdot \frac{ds_{p_1}}{dt} \cdot \frac{d\pi}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial r}{\partial \pi} \cdot \frac{d\pi}{dt} \right) \frac{ds_p}{dt} + \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) \frac{ds_{p_1}}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \pi} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{ds_p}{dt} \right) \frac{d\pi}{dt} + \frac{\partial}{\partial \pi_1} \left(\frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{ds_{p_1}}{dt} \right) \frac{d\pi_1}{dt}. \end{aligned}$$

Stellen wir die entsprechenden Ausdrücke auf für die Differentialquotienten von $r(p, n_1)$, der Entfernung der positiven

Electricität des Elementes Ds von der negativen des Elementes Ds_1 , so ergibt sich nach dem Weberschen Gesetz für die Gesamtwirkung, welche von $J_1 Ds_1$ auf die positive Electricität des Elementes Ds ausgeübt wird, der Werth:

$$\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot e_p Ds \cdot \frac{J_1 Ds_1}{r^2} \left\{ \begin{aligned} & 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} \cdot \frac{ds_p}{dt} - \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{ds_p}{dt} \\ & + 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial \pi} \frac{d\pi}{dt} - \frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \pi} \frac{d\pi}{dt} \\ & + r \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) + r \frac{\partial}{\partial \pi_1} \left(\frac{\partial r}{\partial s_1} \right) \frac{d\pi_1}{dt} \\ & - \frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \end{aligned} \right\}.$$

Vertauschen wir in diesem Ausdruck e_p mit e_n , $\frac{ds_p}{dt}$ mit $\frac{ds_n}{dt}$, so erhalten wir die auf die negative Electricität des Elementes Ds von $J_1 Ds_1$ ausgeübte Wirkung. Durch Addition der beiden Kräfte ergibt sich die von $J_1 Ds_1$ auf JDs ausgeübte ponderomotorische Wirkung, welche bestimmt ist durch das Ampère'sche Gesetz. Bilden wir dagegen die Differenz der auf die positive und negative Electricität des Elementes Ds ausgeübten Kräfte, und setzen wir $e_p = -e_n = 1$, so erhalten wir die von dem Element $J_1 Ds_1$ in dem Element Ds inducirte electromotorische Kraft:

$$E = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{J_1 Ds_1 Ds}{r^2} \left\{ \begin{aligned} & 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial \pi} \frac{d\pi}{dt} - \frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \pi} \cdot \frac{d\pi}{dt} \\ & + r \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) + r \frac{\partial}{\partial \pi_1} \left(\frac{\partial r}{\partial s_1} \right) \frac{d\pi_1}{dt} \\ & - \frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \end{aligned} \right\}.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \pi_1} &= \frac{\partial r}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \pi_1} + \frac{\partial r}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \pi_1} + \frac{\partial r}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \pi_1} \\ \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) &= \left(\frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \pi_1} + \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \pi_1} + \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \pi_1} \right) \frac{d\pi_1}{dt} \\ &+ \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) + \frac{\partial r}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) + \frac{\partial r}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right). \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\frac{\partial r}{\partial s_1} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial s_1} + \frac{\partial r}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial s_1} + \frac{\partial r}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial s_1}.$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi_1} \left(\frac{\partial r}{\partial s_1} \right) \frac{d\pi_1}{dt} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \pi_1 \partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial s_1} + \frac{\partial^2 r}{\partial \pi_1 \partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial s_1} + \frac{\partial^2 r}{\partial \pi_1 \partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial s_1} \right) \frac{d\pi_1}{dt}$$

$$+ \frac{\partial r}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \pi_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial s_1} \right) \frac{d\pi_1}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \pi_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial s_1} \right) \frac{d\pi_1}{dt} + \frac{\partial r}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \pi_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial s_1} \right) \frac{d\pi_1}{dt}.$$

Aus der Vergleichung der auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \pi_1} \left(\frac{\partial r}{\partial s_1} \right) \frac{d\pi_1}{dt}.$$

Somit erhält man für die von dem Element $J_1 Ds_1$ ausgeübte electromotorische Kraft den Werth:

$$E = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{J_1 Ds_1 \cdot Ds}{r^2} \left\{ \begin{aligned} &2r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial \pi} \cdot \frac{d\pi}{dt} - \frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \pi} \cdot \frac{d\pi}{dt} \\ &+ 2r \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) - \frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \end{aligned} \right\}.$$

Rotiren die beiden Elemente gemeinsam um dieselbe Axe, so ist:

$$\frac{\partial r}{\partial \pi} \cdot \frac{d\pi}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} = 0,$$

und daher auch die electromotorische Kraft gleich Null.

Ist die Bewegung des Leiters s_1 eine rein translatorische, so ist $\frac{d\pi_1}{dt}$ unabhängig von s_1 , und dann ergibt sich für den von der Bewegung dieses Leiters herrührenden Theil der electromotorischen Kraft der Ausdruck:

$$\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{J_1 Ds_1 \cdot Ds}{r^2} \left\{ 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} - \frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right\},$$

welcher identisch ist mit dem von Weber abgeleiteten, aber nicht anwendbar auf den Fall einer rotatorischen Bewegung.

III. Induction eines um eine gegebene Axe rotirenden Solenoides.

Die Rotationsaxe möge durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems hindurchgehen, ihre Richtungscosinus durch α, β, γ , die Winkelgeschwindigkeit durch ω_1 be-

zeichnet werden. Sind dann x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Anfangspunktes irgend eines dem Solenoid angehörnden Elementes Ds_1 , so sind die Geschwindigkeitscomponenten desselben:

$$(\gamma y_1 - \beta z_1) \omega_1, \quad (\alpha z_1 - \gamma x_1) \omega_1, \quad (\beta x_1 - \alpha y_1) \omega_1.$$

Es soll nun die electromotorische Kraft bestimmt werden, welche durch die Rotation des Solenoides in einem ruhenden Leiterelement Ds inducirt wird. Beschränken wir uns auf die Untersuchung der von einem einzelnen, dem Solenoid angehörnden Ringe ausgeübten Wirkung, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden für die X -Componente der von demselben ausgeübten electromotorischen Kraft:

$$\begin{aligned} X &= \frac{4\sqrt{2}}{c} J_1 Ds \int \frac{x-x_1}{r\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) Ds_1 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{c} J_1 Ds \int \frac{(x-x_1)^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{r}{x-x_1} \frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) Ds_1 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{c} \omega_1 J_1 Ds \left\{ \begin{aligned} &(\beta x - \alpha y) \int \frac{(x-x_1) Ds_1 - (z-z_1) Ds_1}{r^3} \\ &(\alpha z - \gamma x) \int \frac{(y-y_1) Ds_1 - (x-x_1) Ds_1}{r^3} \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Die in dem letzten dieser Ausdrücke enthaltenen Integrale lassen sich in bekannter Weise berechnen, wenn der Ring, welchem die Elemente Ds_1 angehören, unendlich klein ist. Bezeichnen wir durch λ_1 die Stromfläche, durch n die Normale des Ringes, und verstehen wir jetzt unter x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Ringmittelpunktes, unter R die Entfernung desselben von dem Elemente Ds , so ergibt sich:

$$X = \frac{d}{dn} \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{c} \omega_1 Ds J_1 \lambda_1 \left[(\beta x - \alpha y) \frac{y-y_1}{R^3} - (\alpha z - \gamma x) \frac{z-z_1}{R^3} \right] \right\},$$

oder auch:

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{dn} \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \omega_1 Ds J_1 \lambda_1 \left[(\beta x_1 - \alpha y_1) \frac{y-y_1}{R^3} - (\alpha z_1 - \gamma x_1) \frac{z-z_1}{R^3} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{d}{dn} \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \omega_1 Ds J_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\alpha(x-x_1) + \beta(y-y_1) + \gamma(z-z_1)}{R} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Es ergeben sich aus diesen Formeln die folgenden Sätze.

1. Die electromotorische Wirkung, welche ein rotirendes Solenoid auf ein ruhendes Leiterelement ausübt, ist gleich der Wirkung des ruhenden Solenoides auf das mit derselben Winkelgeschwindigkeit rückwärts rotirende Element.

2. Die Wirkung eines ruhenden Solenoides auf ein rotirendes Leiterelement kann ersetzt werden durch die Wirkung zweier in den Endpunkten seiner Axe liegender Magnetpole von der Stärke $+J_1 \lambda_1$ und $-J_1 \lambda_1$.

3. Wenn die Endpunkte der Axe eines rotirenden Solenoides auf der Rotationsaxe selber liegen, so können die Componenten der von demselben auf ein Leiterelement Ds ausgeübten electromotorischen Kraft dargestellt werden durch die Differentialquotienten eines und desselben Ausdruckes nach den Coordinaten des Elementes. Dieser Ausdruck hat den Werth:

$$\frac{d}{dn} \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{c} \omega_1 Ds J_1 \lambda_1 \frac{\alpha(x-x_1) + \beta(y-y_1) + \gamma(z-z_1)}{R} \right\}.$$

Dieser letztere Satz findet natürlich auch dann Anwendung, wenn die Rotationsaxe ganz mit der Axe des Solenoides zusammenfällt. In diesem Falle kann man aber die Wirkung des Solenoides auch von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus behandeln, zu welchem die folgende Betrachtung hinführt. Wenn die Axe des Solenoides mit der Rotationsaxe zusammenfällt, so werden die einzelnen Ringe des Solenoides sich in sich selbst verschieben, und in Folge dieser Bewegung werden die Geschwindigkeiten der in galvanischer Strömung begriffenen Electricitäten je nach der Rotationsrichtung eine Vermehrung oder eine Verminderung erleiden. Nehmen wir an, die Richtung der Rotation falle zusammen mit der Richtung des positiven Stromes, und die Drehungsgeschwindigkeit sei gleich w ; bezeichnen wir ferner durch e_p und e_n die in der Längeneinheit des Rings enthaltenen Mengen strömender positiver und negativer Electricität, durch u_p und u_n die Geschwindigkeiten der galvanischen Strömung, so sind die in Folge der Rotation des Rings auftretenden wirklichen Geschwindigkeiten:

für e_p gleich $u_p + w$, für e_n gleich $u_p - w$.

Nach einem Satze, welchen ich in einer früheren Arbeit¹⁾ bewiesen habe, kann die electromotorische Kraft, welche durch die beiden in dem Ringe sich bewegenden electrischen Flüssigkeiten ausgeübt wird, dargestellt werden mit Hülfe des Potentials:

$$\begin{aligned} & -\frac{8}{c^2} \cdot e_p (u_p + w)^2 \int \left(\frac{\partial V r}{\partial s_1} \right)^2 D s_1 \\ & -\frac{8}{c^2} \cdot e_n (u_n - w)^2 \int \left(\frac{\partial V r}{\partial s_1} \right)^2 D s_1 \\ & = -\frac{16}{c^2} (e_p u_p + e_n u_n) w \int \left(\frac{\partial V r}{\partial s_1} \right)^2 D s_1. \end{aligned}$$

Es ist aber $\frac{V^2}{c} (e_p u_p + e_n u_n)$ gleich der Stromstärke des Rings nach magnetischem Maasse, somit ergibt sich für das Potential des Rings der Werth:

$$-\frac{8V^2}{c} J_1 w \int \left(\frac{\partial V r}{\partial s_1} \right)^2 D s_1 = -\frac{2V^2}{c} J_1 w \int \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial s_1} D s_1.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial s_1} D s_1 &= -\frac{x-x_1}{r} D x_1 - \frac{y-y_1}{r} D y_1 - \frac{z-z_1}{r} D z_1, \\ \frac{\partial r}{\partial s_1} &= -\frac{x-x_1}{r} \frac{d x_1}{d s_1} - \frac{y-y_1}{r} \frac{d y_1}{d s_1} - \frac{z-z_1}{r} \frac{d z_1}{d s_1}. \end{aligned}$$

Substituiren wir in dem letzteren Ausdruck an Stelle von $\frac{d x_1}{d s_1}$, $\frac{d y_1}{d s_1}$, $\frac{d z_1}{d s_1}$ die Werthe:

$$\begin{aligned} \frac{d x_1}{d s_1} &= \frac{\omega_1}{w} (\gamma y_1 - \beta z_1), \quad \frac{d y_1}{d s_1} = \frac{\omega_1}{w} (\alpha z_1 - \gamma x_1), \\ \frac{d z_1}{d s_1} &= \frac{\omega_1}{w} (\beta x_1 - \alpha y_1), \end{aligned}$$

so erhalten wir für das Potential den Ausdruck:

$$\begin{aligned} & -\frac{2V^2}{c} J_1 \omega_1 \int \frac{1}{r^3} \left\{ x(\gamma y_1 - \beta z_1) + y(\alpha z_1 - \gamma x_1) \right. \\ & \quad \left. + z(\beta x_1 - \alpha y_1) \right\} \\ & \quad \left\{ (x-x_1) D x_1 + (y-y_1) D y_1 + (z-z_1) D z_1 \right\}. \end{aligned}$$

Wir haben nun die Bedingung einzuführen, dass die Dimensionen des Rings, dessen Potential durch den vorstehenden Ausdruck dargestellt ist, unendlich klein sind

1) E. Riecke, Götting. Nachr. p. 536. 1873.

gegen die Entfernung desselben von dem Element Ds . Verstehen wir jetzt unter $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Mittelpunktes des Ringes, und bezeichnen wir die Coordinaten des Anfangspunktes irgend eines Elementes Ds_1 durch $x_1 + \xi_1, y_1 + \eta_1, z_1 + \zeta_1$, so ist, da die Axe des Ringes mit der Drehungsaxe zusammenfällt:

$$\alpha : \beta : \gamma = x_1 : y_1 : z_1,$$

somit ergibt sich für das Potential:

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} J_1 \omega_1 \int \frac{1}{R^3} \left\{ x(\gamma \eta_1 - \beta \zeta_1) + y(\alpha \zeta_1 - \gamma \xi_1) + z(\beta \xi_1 - \alpha \eta_1) \right\} \\ \left\{ (x - x_1) D\xi_1 + (y - y_1) D\eta_1 + (z - z_1) D\zeta_1 \right\},$$

wo R die Entfernung des Ringmittelpunktes von dem Element Ds bezeichnet. Die Ausführung der Integration führt mit Rücksicht darauf, dass unter den angenommenen Verhältnissen die Richtung der positiven Normale des Stroms der Richtung der Drehungsaxe entgegengesetzt ist, zu dem Ausdruck:

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} J_1 \lambda_1 \omega_1 \frac{1}{R^3} \left\{ R^2 - [\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1)]^2 \right\},$$

$$\text{oder: } \frac{d}{dn} \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{c} \lambda_1 J_1 \omega_1 \frac{\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1)}{R} \right\},$$

d. h. zu demselben Ausdruck, den wir oben auf einem ganz andern Wege erhalten hatten.

IV. Induction eines um seine Axe rotirenden Kreisringes.

Es möge im Folgenden die Induction eines Kreisringes von beliebigem Durchmesser betrachtet werden, welcher um seine Axe in Rotation versetzt wird. Die X -Componente der von demselben ausgeübten electromotorischen Wirkung ist gegeben durch den allgemein gültigen Ausdruck:

$$X = \frac{4\sqrt{2}}{c} J_1 Ds \int \frac{x - x_1}{r \sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{\partial r}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} \right) Ds_1.$$

Verstehen wir unter π_1 die mit s_1 übereinstimmende Richtung, in welcher sich die Elemente Ds_1 des Ringes bewegen,

so stellt $\frac{d\pi_1}{dt}$ die gemeinsame Drehungsgeschwindigkeit derselben vor; es ergibt sich demnach:

$$X = \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{c} J_1 \frac{d\pi_1}{dt} Ds \int \frac{\partial V\bar{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 V\bar{r}}{\partial s_1 \partial \pi_1} Ds_1,$$

oder, da:

$$2 \frac{\partial V\bar{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 V\bar{r}}{\partial s_1 \partial \pi_1} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V\bar{r}}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial V\bar{r}}{\partial \pi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial V\bar{r}}{\partial \pi_1} \cdot \frac{\partial V\bar{r}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \pi_1} \left(\frac{\partial V\bar{r}}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial V\bar{r}}{\partial x} \right),$$

und die Integration nach s_1 oder π_1 über eine geschlossene Curve hin zu erstrecken ist:

$$\begin{aligned} X &= - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{8 \sqrt{2}}{c} J_1 \frac{d\pi_1}{dt} Ds \int \frac{\partial V\bar{r}}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial V\bar{r}}{\partial \pi_1} Ds_1 \right\} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{8 \sqrt{2}}{c} J_1 \frac{d\pi_1}{dt} \cdot Ds \int \left(\frac{\partial V\bar{r}}{\partial s_1} \right)^2 Ds_1 \right\}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit auch für diesen Fall die Existenz eines electromotorischen Potentials, welches mit dem aus dem angeführten Satze sich ergebenden vollkommen identisch ist.

V. Theorie der unipolaren Induction.

Bei den Erscheinungen der unipolaren Induction kann die ganze Leiterbahn zerlegt werden in zwei Theile, von welchen der eine M mit dem Magnet zusammen rotirt, der andere J eine im Raume unveränderliche Lage besitzt. Nach dem Vorhergehenden ist die von dem rotirenden Magnet auf J ausgeübte electromotorische Kraft dieselbe wie diejenige, welche von dem festliegenden Magnet auf den mit derselben Winkelgeschwindigkeit rückwärts rotirenden Leitertheil J ausgeübt wird. Daraus ergibt sich, dass auf die Erscheinungen der unipolaren Induction diejenigen Formeln unmittelbar anwendbar sind, welche ich in dem zweiten Abschnitte des bereits angeführten Aufsatzes¹⁾ mitgetheilt habe; danach ist die X -Componente der electromotorischen Kraft, welche ein ruhender Magnetpol μ , dessen

1) E. Riecke, Wied. Ann. 1. p. 117. 1877.

rechtwinkelige Coordinaten gleich x_1, y_1, z_1 sind, auf ein in Rotation begriffenes Leiterelement Ds mit den Coordinaten x, y, z ausübt, gegeben durch den Ausdruck:

$$\Xi = \frac{2\sqrt{2}}{c} \frac{\mu \omega Ds}{r^3} \left\{ (y - y_1)(\alpha y - \beta x) - (z - z_1)(\gamma x - \alpha z) \right\},$$

wo unter α, β, γ die Richtungscosinus der durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Rotationsaxe, unter ω die Winkelgeschwindigkeit zu verstehen ist. Wenn es sich nun nicht um die Induction eines einzelnen Magnetpoles, sondern wie bei den Versuchen von Weber um die Induction eines cylindrischen Magnets handelt, so kann dieser jedenfalls ersetzt werden durch die äquivalente Belegung seiner Oberfläche mit magnetischen Massen. Diese Oberflächenbelegung wird aber so beschaffen sein, dass längs der Peripherie eines zur Cylinderaxe senkrechten Kreises die Dichtigkeit constant ist. Für die von einem solchen Kreise auf das rotirende Element Ds ausgeübte electromotorische Kraft ergibt sich somit der folgende Werth der X -Komponente:

$$\Xi = \frac{2\sqrt{2}}{c} \omega Ds \left\{ (\alpha y - \beta x) \int \frac{y - y_1}{r^3} \mu D\sigma_1 \right. \\ \left. - (\gamma x - \alpha z) \int \frac{z - z_1}{r^3} \mu D\sigma_1 \right\},$$

wo jetzt unter μ die Dichtigkeit der magnetischen Belegung jener Kreisperipherie, unter $D\sigma$ ein Element derselben verstanden ist.

Bei der weitem Behandlung dieses Ausdruckes beschränken wir uns auf den Fall, dass der Halbmesser des cylindrischen Magnets sehr klein ist im Vergleich zu der Entfernung des Elementes Ds von den Punkten seiner Oberfläche. Verstehen wir dann unter x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Mittelpunktes des von uns betrachteten Kreises, unter R die Entfernung desselben von dem Element Ds , und bezeichnen wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Kreisperipherie durch $x_1 + \xi_1, y_1 + \eta_1, z_1 + \zeta_1$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} - 3 \frac{(x - x_1)\xi_1 + (y - y_1)\eta_1 + (z - z_1)\zeta_1}{R^5}.$$

Da aber ausserdem:

$$\int \xi \mu D\sigma = \int \eta \mu D\sigma = \int \zeta \mu D\sigma = 0,$$

so reducirt sich der Werth der X -Componente auf:

$$\bar{z} = \frac{2\sqrt{2}}{c} \omega Ds \left\{ \begin{aligned} & (\alpha y - \beta x) \frac{y - y_1}{R^3} \int \mu D\sigma \\ & - (\gamma x - \alpha z) \frac{z - z_1}{R^3} \int \mu D\sigma \end{aligned} \right\},$$

d. h. wenn man die zweite Potenz des Kreishalbmessers vernachlässigt gegen die entsprechende Potenz der Entfernung von dem Elemente Ds , so kann die ganze auf der Peripherie des betrachteten Kreises vertheilte magnetische Masse in seinem Mittelpunkte concentrirt, die äquivalente Oberflächenbelegung also ersetzt werden durch eine Vertheilung magnetischer Massen in der Axe des cylindrischen Magnets.

Mit Rücksicht darauf, dass bei den Versuchen über unipolare Induction die Axe des Magnets mit der Rotationsaxe zusammenfällt, und dass also:

$$x_1 : y_1 : z_1 = \alpha : \beta : \gamma,$$

ist der Ausdruck für die in dem Elemente Ds inducirte electromotorische Kraft noch einer weitem Umformung fähig. Bezeichnen wir durch dm die ganze auf der Peripherie des von uns betrachteten Kreises vertheilte magnetische Masse, so ergibt sich zunächst für die von demselben herführende X -Componente der electromotorischen Kraft der Werth:

$$\bar{z} = \frac{2\sqrt{2}}{c} dm \cdot \omega \cdot Ds \cdot \left\{ \frac{\alpha}{R} - (x - x_1) \frac{\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1)}{R^3} \right\},$$

oder:

$$\bar{z} = \frac{2\sqrt{2}}{c} dm \omega Ds \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1)}{R} \right\}.$$

Der in der Klammer enthaltene Ausdruck ist nichts anderes als der Cosinus des Winkels, welchen die Rotationsaxe einschliesst mit der Entfernung von dem Mittelpunkte des betrachteten Kreises bis zu dem Elemente Ds . Bezeichnen wir diesen Cosinus durch Θ , so ergibt sich für die X -Componente der electromotorischen Kraft der Werth:

$$\bar{z} = \frac{2\sqrt{2}}{c} dm \omega Ds \frac{\partial \Theta}{\partial x}.$$

Die wirksame, mit der Richtung des Elementes Ds zusammenfallende Componente der electromotorischen Kraft wird daher:

$$\Sigma = \frac{2\sqrt{2}}{c} dm \cdot \omega \cdot Ds \frac{\partial \Theta}{\partial s}.$$

Für die auf den ganzen Leitertheil J , welchem das Element Ds angehört, ausgeübte electromotorische Kraft ergibt sich somit:

$$S = \frac{2\sqrt{2}}{c} dm \omega (\Theta_1 - \Theta_0),$$

wo unter Θ_1 und Θ_0 die Werthe zu verstehen sind, welche Θ im Endpunkt und im Anfangspunkt des Leitertheiles J besitzt. Diese electromotorische Kraft rührt her von der magnetischen Masse, welche irgend einem der auf der Oberfläche des Magnets gezogenen Kreise angehört, und zwar konnte bei der Berechnung von S die ganze Masse im Mittelpunkt des Kreises concentrirt gedacht werden. Wenn wir nun in dieser Weise das ganze System der die Oberfläche des Magnets bedeckenden und mit magnetischer Masse belegten Parallelkreise ersetzen durch die entsprechenden, in ihren Mittelpunkten vereinigten Massen, so tritt an Stelle der äquivalenten Oberflächenbelegung eine Vertheilung magnetischer Massen in der Axe des Magnets. Für die von derselben auf den Leitertheil J ausgeübte electromotorische Kraft ergibt sich der Ausdruck:

$$e = \frac{2\sqrt{2}}{c} \omega \int (\Theta_1 - \Theta_0) dm,$$

wo das Integral über die ganze Axe des Magnets zu erstrecken, und dabei zu beachten ist, dass in den Endpunkten derselben zwei singuläre Massen von ungewöhnlicher Grösse sich befinden werden, entsprechend den auf den Endflächen des Cylinders vorhandenen Oberflächenbelegungen. Man überzeugt sich leicht, dass auch für den Fall der hier betrachteten Inductionerscheinungen eine Ersetzung des Magnets durch zwei äquivalente Pole möglich ist, d. h., dass sich zwei symmetrisch gegen die Mitte der Axe gelegene Pole von entgegengesetzt gleichem Magnetismus bestimmen lassen, deren magnetisches Moment gleich ist dem Moment

des gegebenen Magnets, und welche auf den Leitertheil J dieselbe electromotorische Kraft ausüben wie dieser.

Lassen wir nun diese Ersetzung des Magnets durch zwei Pole eintreten, und bezeichnen wir die Menge des in denselben concentrirten nördlichen und südlichen Magnetismus durch m , so ergibt sich für die in dem Leitertheil J inducirte electromotorische Kraft:

$$e = \frac{2\sqrt{2}}{c} \omega m (\Theta_{1n} - \Theta_{0n} - \Theta_{1s} + \Theta_{0s}).$$

Hier sind durch den Index n die dem Nordpol, durch den Index s die dem Südpol entsprechenden Werthe von Θ bezeichnet. Der Integralwerth der electromotorischen Kraft, welcher einer ganzen Umdrehung des Leitertheils J , oder einer umgekehrten Drehung des Magnets zusammen mit dem Leitertheil M entspricht, wird, da der Werth von Θ durch die Drehung keine Aenderung erleidet:

$$E = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot 2\pi m (\Theta_{1n} - \Theta_{0n} - \Theta_{1s} + \Theta_{0s}).$$

Liegt insbesondere der Anfangspunkt des Leitertheils J auf der Drehungsaxe, aber ausserhalb der Axe des Magnets, so ist:

$$\Theta_{0n} = \Theta_{0s} = 1,$$

und somit reducirt sich die electromotorische Kraft auf:

$$E = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot 2\pi m (\Theta_{1n} - \Theta_{1s}).$$

Liegt ferner der Endpunkt des Leitertheils J in derjenigen Ebene, durch welche die Axe des Magnets senkrecht halbirt wird, so ist:

$$\Theta_{1n} = -\Theta_{1s} = -\Theta,$$

und somit

$$E = -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot 4\pi m \Theta,$$

wo Θ der Cosinus des Winkels ist, welchen die Axe mit der von dem Südpol nach dem Endpunkt des Leiters hingehenden Linie einschliesst. Der Werth dieses Cosinus nähert sich um so mehr der Einheit, je näher der Endpunkt von J der Axe des Magnets rückt, und er würde der Einheit gleich, wenn jener Endpunkt auf die Axe fallen würde. In

diesem idealen Falle würde also der Ausdruck der electromotorischen Kraft:

$$E = - \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot 4\pi m,$$

d. h. identisch mit demjenigen, welchen Weber aus seiner Theorie entwickelt hat.

Allgemein können wir für die zuletzt betrachteten Verhältnisse den gefundenen Ausdruck so schreiben:

$$E = - \frac{2\sqrt{2}}{c} 4\pi m + \frac{2\sqrt{2}}{c} 4\pi m (1 - \Theta).$$

Dann ist der erste Theil dieses Ausdruckes wiederum identisch mit der von Weber angenommenen electromotorischen Kraft; der zweite Theil ist nichts anderes, als diejenige electromotorische Kraft, welche auf den mit dem Magnet verbundenen Leitertheil M ausgeübt wird, wenn dieser aus seiner Verbindung mit dem Magnet gelöst und bei festgehaltenem Magnet in rückläufige Rotation versetzt wird. Dieser zweite Theil der electromotorischen Kraft ist somit identisch mit derjenigen Kraft, welche bei der von mir entwickelten electromagnetischen Theorie der unipolaren Induction zu der von Weber angenommenen noch hinzutritt. Wir kommen also schliesslich zu dem überraschenden Resultate, dass die electromagnetische Theorie, wenn sie in der von mir in dem früheren Aufsätze über unipolare Induction angegebenen Weise ergänzt wird, zu ganz demselben Werthe der electromotorischen Kraft führt, wie die im Vorhergehenden enthaltene electrodynamische Theorie, wenigstens innerhalb derjenigen Grenzen, welche wir unserer Betrachtung von Anfang an gezogen haben. Die Erscheinungen der unipolaren Induction dürften daher nicht geeignet sein, eine experimentelle Entscheidung zwischen der Theorie der magnetischen Flüssigkeiten und der Ampère'schen Theorie des Magnetismus zu liefern, vielmehr erstreckt sich auch auf diese Erscheinungen wenigstens in erster Annäherung die Aequivalenz der beiden Vorstellungskreise. Obwohl also keine Erscheinungen bekannt sind, durch welche die Alternative zwischen den

beiden Theorien in unzweideutiger Weise und auf rein experimentellem Wege zu Gunsten der Ampère'schen Theorie entschieden würde, sind doch die auf theoretischer Seite zu Gunsten der letzteren Annahme sprechenden Gründe von solchem Gewicht, dass man ihnen gegenüber die Vorstellung von der reellen Existenz der magnetischen Flüssigkeiten gegenwärtig nicht wird aufrecht erhalten wollen. Damit hört aber auch die Bezeichnung der im Vorhergehenden betrachteten Erscheinungen als „unipolare Induction“ auf, einem wirklichen Vorgange zu entsprechen. Mit Rücksicht hierauf dürfte es sich vielleicht empfehlen, diesen Namen fallen zu lassen, und man könnte dann an Stelle desselben die Bezeichnung „magnetelectrische Rotationserscheinungen“ in Vorschlag bringen. Unter diesem Namen würden gleichzeitig die Plücker'schen Versuche zu begreifen sein, welche vom electrodynamischen Standpunkt aus mit den Weber'schen wesentlich identisch sind, während dieselben von dem Namen „unipolare Induction“ selbst dann nicht getroffen werden, wenn man sich auf den Standpunkt der electromagnetischen Theorie stellt.

Göttingen, im April 1880.

IV. *Bestimmung der absoluten Geschwindigkeit fließender Electricität aus dem Hall'schen Phänomen; von Albert v. Ettingshausen.*

(Aus den Sitzungsber. d. k. Acad. d. Wiss. in Wien vom 4. März 1880 vom Verf. mitgetheilt.)

Die Erscheinung, welche E. H. Hall¹⁾ in Baltimore kürzlich beobachtete, besteht darin, dass in einer von einem constanten galvanischen Strome durchflossenen, sehr dünnen Goldplatte durch die Wirkung eines starken Magnets, dessen

1) Hall, American Journal of Mathematics, 2. p. 287. 1879.

Kraftlinien die Ebene der Platte durchschneiden, die Aequipotentiaallinien eine Verschiebung erfahren.

Es sind bereits früher mehrfach Versuche gemacht worden, eine derartige Einwirkung eines Magnets auf die Stromlinien nachzuweisen, jedoch mit negativem Resultate.¹⁾ Hall verfuhr in der Weise, dass er auf der zwischen den Polen eines Electromagnets befindlichen und vom Strome durchflossenen Goldplatte zwei Punkte von nahe gleichem Potentialwerthe mit Hülfe eines empfindlichen Galvanometers aufsuchte, sodann den magnetisirenden Strom umkehrte und die Aenderung des Galvanometerstandes beobachtete. Die Goldplatte hatte die Gestalt eines Rechteckes, und der dieselbe durchfliessende Strom wurde mittelst zweier Messingstücke, welche auf beide Enden der Platte fest aufgedrückt waren, zugeleitet, sodass die Stromcurven gerade, der längeren Seite des Rechteckes parallele Linien sind.

Boltzmann²⁾ hat darauf aufmerksam gemacht, dass unter gewissen vereinfachenden Annahmen aus dem erwähnten Phänomen sich die absolute Geschwindigkeit, mit der die Electricität die Goldplatte durchfliesst, berechnen lässt. Bedeutet nämlich m die Intensität des als homogen vorausgesetzten magnetischen Feldes, i die am Galvanometer beobachtete Stromstärke, w den gesammten Widerstand der Galvanometerleitung, sämmtliche Grössen in dem absoluten Gauss'schen Maasse gemessen, ist ferner b der Abstand der beiden Punkte der Goldplatte, welche mit dem Galvanometer verbunden sind, so ist die Geschwindigkeit c der die Platte der Länge nach durchfliessenden Electricität (die Geschwindigkeit im Strome J).

$$c = \frac{i w}{m b}.$$

Ist auch J im obigen Maasse gemessen worden, so ist die Geschwindigkeit im Strome 1 nach magnetischem Maasse:

$$c_1 = \frac{c}{J} = \frac{i w}{m b J}.$$

1) Wiedemann, Galv. 2. (1) p. 174; auch Rowland hat solche Versuche angestellt. (Hall, l. c. p. 289.)

2) Boltzmann, Wien. Anz. Nr. 2. 15. Jan. 1880.

Wie mir Prof. Boltzmann mündlich mittheilte, hat derselbe weiter gefunden, dass sich die besprochene Erscheinung auffassen lässt als eine Ablenkung, welche die Stromlinien in der Platte von ihrer ursprünglichen Richtung erfahren, jedoch so, dass dadurch keine Verdichtung, resp. Verdünnung der Stromlinien an der einen oder andern Seite der Platte eintritt. Sind die Seiten der Platte nicht mit einander durch eine äussere Leitung verbunden, so kann diese Ablenkung nur im ersten Momente der Einwirkung des Magnets eintreten, sogleich wird aber an den Rändern der Platte eine Potentialdifferenz entstehen, welche sich mit der schon vorhandenen zusammensetzt und die Stromlinien wieder in die frühere Richtung drängt. Werden jedoch Punkte der Platte, welche anfänglich gleiche Potentialwerthe besaßen, durch eine Galvanometerleitung mit einander verbunden, so veranlasst die zwischen diesen Punkten neu entstandene Potentialdifferenz den Strom i .

Die Ermittlung der Grösse c_1 nach den von Hall mitgetheilten quantitativen Bestimmungen ist nur ganz roh schätzungsweise möglich (s. w. u.); es schien deshalb von Interesse, die Versuche zu wiederholen und eine Bestimmung von c_1 auszuführen. Zuerst benutzte ich eine auf eine Glasplatte aufgezogene, rechteckige Goldplatte D (Taf. IV Fig. 12) von 56 mm Länge und 52 mm Breite, bei welcher die Stromzuleitung durch etwa 2 mm breite Stanniolstreifen s_1, s_2 besorgt wurde, die über die Mitte der kurzen Seiten des Rechteckes geklebt waren.

Die mit dem Galvanometer verbundenen Contacte g_1, g_2 sind vergoldete Messingkügelchen (2 mm Durchmesser), an denen eine kleine Fläche eben polirt ist, mit der dieselben auf die Goldplatte aufgesetzt werden. Die Contactkügelchen sind an schwachen Federn f_1, f_2 befestigt, welche sie auf die Platte niederdrücken. Der eine Contact g_1 ist durch die Schraube S verstellbar. Die in dem Holzrahmen H befestigte Glasplatte wurde vertical zwischen die abgeflachten Pole eines kräftigen Electromagnets gestellt, dessen Polflächen eine Distanz von beiläufig 12 mm hatten, und der durch 6, 12 oder 18 grosse Bunsen'sche Elemente erregt

wurde. Zur Bestimmung der Intensität des Magnetfeldes dienten einige zwischen die Pole parallel mit deren Flächen gestellte, kreisförmige Drahtwindungen, die mit einem Spiegelgalvanometer verbunden sind; es wurde stets die Aenderung m des Magnetfeldes bei Umkehrung des magnetisirenden Stromes bestimmt. Die Messung des Stromes i geschieht mit demselben Galvanometer, und wird auch hierbei die der Veränderung des Magnetfeldes bei Umkehrung der magnetischen Polarität entsprechende Stärke des Stromes i ermittelt. Bei der Umkehrung des magnetisirenden Stromes erhält man zuerst einen starken Ausschlag der Galvanometernadel infolge des in der Goldplatte inducirten Stromes, worauf die Nadel um ihre neue Ruhelage schwingt, die aus Umkehrpunkten bestimmt wird. Um nicht zu starke Schwingungen zu erhalten, wurde die Galvanometerleitung während der Umkehrung der Polarität des Electromagnets geöffnet. Das Galvanometer stand in einem entfernten Zimmer, sodass auch nicht die geringste directe Einwirkung des Magnets auf dasselbe bemerkbar war.

Die dauernden Verschiebungen der Ruhelage durch den Strom i ergaben sich meist sehr regelmässig, und wurden die Beobachtungen 8—10 mal hinter einander wiederholt; ich führe zunächst eine Beobachtung der Galvanometerstände vollständig an: unter A und B sind die Ruhelagen der Nadel verstanden, wie sie bei entgegengesetzter Polarität des Electromagnets an der Scala beobachtet sind, und zwar ist bei A der auf der Seite der Goldplatte befindliche Pol ein Südpol (s. Taf. IV Fig. 12).

Distanz des Spiegels von der Scala $d = 3757$ mm.

A	601,5	30,5	A	571,5	30,5	} Mittel 30,3.
B	571,0	30,0	A	602,0	31,5	
A	601,0	30,0	B	570,5	30,5	
B	571,0	30,0	A	601,0	30,5	
A	601,5	30,5	B	571,5	29,5	
B	571,5	30,0				

Die Intensität des die Goldplatte durchfliessenden Stromes J , der von ein oder zwei Daniell'schen Elementen geliefert wurde, kann an einer Tangentenbussole mit Spiegelablesung nach absolutem Maasse gemessen werden.

Die folgenden Tabellen enthalten die Resultate einer Reihe von Beobachtungen. Die zu Grunde gelegten Einheiten sind Millimeter, Milligramm, Secunde; bei der Bestimmung des Widerstandes der Galvanometerleitung wurde die Siemens-Einheit zu $0,955 \times 10^{10}$ absoluten Einheiten angenommen, entsprechend den neuen Messungen von H. F. Weber.¹⁾ Die Schwingungsdauer der Galvanometernadel ist $T = 4,635$, das Dämpfungsverhältniss der Schwingungen $k = 1,358$, der Reductionsfactor auf magnetisches Strommaass $G = 0,00609$.

$$b = 44, \quad w = 57,3 \times 10^{10}.$$

Nr.	J	m	i	$\frac{i}{Jm}$	
1	1,70	85 900	$12,2 \times 10^{-6}$	$0,835 \times 10^{-10}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Mittel} \\ 0,823 \times 10^{-10} \end{array}$
2	2,91	85 900	20,3	812	
3	2,91	106 500	24,6	794	
4	5,42	54 700	24,9	840	
5	5,51	85 900	39,1	826	
6	5,51	106 500	48,8	832	

Es folgt hiernach $c_1 = 1,07$.

$$b = 31,5, \quad w = 55,2 \times 10^{10}.$$

Nr.	J	m	i	$\frac{i}{Jm}$	
7	2,90	55 960	$11,3 \times 10^{-6}$	$0,697 \times 10^{-10}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Mittel} \\ 0,700 \times 10^{-10} \end{array}$
8	5,51	57 680	22,3	703	

demnach $c_1 = 1,23$.

$$b = 22,4, \quad w = 54,3 \times 10^{10}.$$

9	2,90	56 790	$8,95 \times 10^{-6}$	$0,542 \times 10^{-10}$	
---	------	--------	-----------------------	-------------------------	--

daraus $c_1 = 1,31$.

Es wäre demnach die absolute Geschwindigkeit, mit der die Electricität im Strome 1 das untersuchte Goldblatt durchfließt, etwa 1,2 mm. Die kleine Zunahme, welche c_1 mit abnehmendem b zeigt, hat vermuthlich ihren Grund in der nur unvollkommenen Homogenität des magnetischen Feldes, von der ich mich auch durch Versuche mit einigen sehr kleinen Drahtwindungen, die an verschiedene Stellen des Feldes gebracht wurden, überzeugte. Zur Bestimmung von m dienten entweder drei Windungen von 38,2 mm Durch-

1) Absolute electromagnetische und calorimetrische Messungen p. 46. 1877.

messer oder zwei Windungen von 30,6 mm Durchmesser; die kleineren Windungen gaben um etwa 2 Proc. grössere Werthe für m . Durch diese Bestimmungen erhält man aber nur die Mittelwerthe der Aenderung des Magnetfeldes innerhalb der von den Drahtwindungen eingeschlossenen Flächen. Ein unhomogenes Magnetfeld beeinträchtigt aber auch insofern die Richtigkeit der Messungen, als dann ein Theil des Stromes i statt durch die Galvanometerleitung durch die Goldplatte selbst fliessen kann, wie eine einfache Ueberlegung zeigt; es ist namentlich eine (dem Magnetfeld gegenüber) grössere Ausdehnung der Goldplatte in der Richtung des Stromes J den Messungen ungünstig.

Die Goldplatte, welche durch die Versuche etwas gelitten hatte, wurde sodann durch eine neue, sehr schöne Platte ersetzt; bei dieser trat der Strom in der ganzen Breite der Platte ein und aus, da die Platte an den Rändern beiderseits mit Stanniol überklebt war. Der von Stanniol unbedeckte Theil hatte eine Länge von 53,4, und eine Breite von 28 mm, der Widerstand war 2,85 S.-E. (Hall gibt für seine Platte an: Länge etwa 55, Breite 20 mm, Widerstand nahe 2 Ohm = 2,1 S.-E.). Aus zwei gut übereinstimmenden Versuchsreihen ergab sich:

Nr.	J	m	i
10	3,41	87 900	$27,5 \times 10^{-6}$;

dabei war die Distanz der Galvanometercontacte $b = 20,6$, der Widerstand der Galvanometerleitung $w = 54,9 \times 10^{10}$; es folgt $c_1 = 2,24$ mm.

Ich habe versucht, die Dicke der Goldplatten angenähert zu bestimmen; die beim Versuch 10 benutzte Platte war nämlich, bevor sie auf die Glasplatte aufgezogen wurde, sorgfältig gewogen worden, und ergab sich aus der Wägung ihre Dicke zu 56 Milliontel Millimeter. Aus dem Widerstande der Platte folgt dagegen unter der Voraussetzung, dass keine merklichen Sprünge oder Risse vorhanden sind, die Dicke zu 14 Milliontel Millimetern, also 4mal so klein. Ein ähnliches Resultat zeigte sich auch bei einer anderen Goldplatte. Für die Platte, welche bei den Versuchen 1—9 gedient hatte, ergab die Wägung eine mehr als 10mal so

grosse Dicke, als aus dem Widerstande der (beiderseits mit Stanniolrändern versehenen) Platte folgte; indess war diese Platte bereits schadhafte, sie scheint jedenfalls dicker gewesen zu sein, als die beim Versuch 10 gebrauchte.

Zur Controle der Richtigkeit der Messungen habe ich mit dem Galvanometer die Scheidekraft im Inneren einer Spirale, die von einem constanten Strome durchflossen war, bestimmt und das so erhaltene Resultat mit dem aus den Dimensionen der Spirale und der Stromstärke berechneten verglichen, was eine ganz befriedigende Uebereinstimmung gab; ausserdem wurde noch eine Prüfung vorgenommen, die auf Folgendem beruht. Aus der Gleichung:

$$c = c_1 J = \frac{i w}{m b}$$

folgt, dass die Geschwindigkeit im Strome J gleich ist der Geschwindigkeit, mit welcher ein Draht von der Länge b senkrecht zu sich selbst durch ein magnetisches Feld m bewegt werden muss, damit in ihm eine electromotorische Kraft erzeugt werde, die in einer Leitung vom Widerstande w den Strom i liefert.¹⁾ Ein flacher Kupferring K (Taf. IV Fig. 13) ist auf eine Kammmassescheibe aufgesetzt, die in Rotation versetzt werden kann. An den Ring sind radial stehende, an den Enden amalgamirte Drähte b angelöthet, welche bei der Rotation durch das Quecksilber der Rinne R schlagen. An dem Kupferringe schleift eine Contactfeder, die mit dem Galvanometer in Verbindung steht, andererseits ist dieses mit der Rinne leitend verbunden. Stellt man die Scheibe so auf, dass die Speichen bei der Rotation durch das Magnetfeld hindurchgehen und gleichzeitig ins Quecksilber tauchen, so erhält man bei der Aenderung m des Magnetfeldes am Galvanometer eine dauernde Aenderung der Ruhelage α , aus der sich die Geschwindigkeit c , mit der sich die Speichen bewegen, berechnen lässt; es ist:

$$c = \frac{G}{2d} \frac{w}{mb} \frac{T}{z\vartheta} \alpha.$$

Darin haben G , d , T die frühere Bedeutung, w ist der Widerstand der Leitung, b die Länge der Speichen, ϑ die

1) Boltzmann l. c.

Zeit, während welcher eine Speiche durch das Quecksilber schlägt, z die Anzahl der auf eine Galvanometerschwingung entfallenden Inductionsstösse: folgen diese Stösse unmittelbar aufeinander, sodass eine Speiche das Quecksilber verlässt in dem Augenblicke, wo die nächste eintaucht, so ist $z\vartheta = T$. Wird nun die Intensitätsänderung m des Magnetfeldes auf die oben angegebene Weise mit Drahtwindungen von der Fläche f bestimmt, und ist β der Ausschlag der Galvanometernadel, so hat man:

$$m = \frac{1}{f} \frac{G}{2d} \cdot \frac{T}{\pi} \sqrt{k} \cdot w_1 \beta;$$

w_1 ist der Widerstand der Leitung im letztern Falle. Dann ist also:

$$c = \frac{w}{w_1} \cdot \frac{f}{b} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{z\vartheta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ein Versuch mit 24 Speichen von der Länge $b=45$ mm, die in unmittelbarer Aufeinanderfolge durchs Quecksilber schlugen, gab $c = 224$ mm. Die rotirende Scheibe ward in constanter Rotation erhalten durch einen Helmholtz'schen Motor mit Schwungscheibe, und es konnte die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe auch direct bestimmt werden; die Dauer einer Umdrehung beim Versuche war $\tau = 2,64$ Sec., woraus folgt, da die Speichenmitten einen Abstand $r=98$ mm von der Axe hatten, $c = \frac{2r\pi}{\tau} = 233$ mm, was mit dem obigen Werthe genügend übereinstimmt. Die Unhomogenität des Magnetfeldes ist bei der Berechnung angenähert berücksichtigt worden.

Eine etwas andere Art der Prüfung besteht darin, dass man die Speichen nicht in unmittelbarer Aufeinanderfolge durchs Quecksilber gehen, sondern eine Reihe von getrennten Inductionsstössen zum Galvanometer gelangen lässt. Ein an der Scheibe befestigter Gradbogen gestattet den Winkel zu bestimmen, den im Mittel eine Speiche ins Quecksilber tauchend durchläuft; dieser Winkel φ lässt sich aber auch leicht berechnen, und zwar ist:

$$\varphi^0 = \frac{180}{\pi} \frac{w}{w_1} \cdot \frac{f}{rb} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\tau}{T} \frac{\alpha}{\beta}.$$

α ist wieder die dauernde Veränderung des Standes der Galvanometernadel, entsprechend der Intensitätsänderung m , n die Anzahl der Speichen; die übrigen Buchstaben haben die alte Bedeutung. Aus zwei Versuchen mit verschiedener Rotationsgeschwindigkeit, wobei zwölf Speichen sich am Ringe befanden, folgte $\varphi = 12,9^\circ$, während $\varphi = 13,1^\circ$ durch directe Bestimmung gefunden worden war.

Es sei noch bemerkt, dass sich auch nach Hall's Messungen eine beiläufige Schätzung der Geschwindigkeit der Electricitätsbewegung vornehmen lässt. Bezeichnet man mit E' die Potentialdifferenz zweier um die Längeneinheit voneinander in der Richtung der Breite entfernter Punkte der Goldplatte, mit E die Potentialdifferenz zweier in der Längsrichtung um die Einheit voneinander abstehender Punkte, so gibt Hall an, dass das Verhältniss $\frac{E}{E'}$ bei seinen Versuchen etwa zwischen den Grenzen 3000 und 6500 variirte.¹⁾

Hieraus, sowie aus dem Widerstande und der Grösse der Goldplatte, ferner aus der angegebenen Intensität des Magnetfeldes²⁾ konnte ich einen Schluss auf die Grösse von c_1 ziehen. Es genügt, zu erwähnen, dass die so erhaltenen Werthe von c_1 , die natürlich nur Grenzwerte sind, der Grössenordnung nach mit den aus meinen Versuchen berechneten übereinstimmen. Die aus Hall's Angaben bestimmten Grenzwerte für c_1 schliessen die von mir gefundenen Werthe ein.

Die geringe Geschwindigkeit, die für die Electricitätsbewegung aus den mitgetheilten Versuchsergebnissen hervorgeht, steht natürlich durchaus nicht im Widerspruch mit der

1) Bei meinem Versuche (9) ist das Verhältniss $\frac{E}{E'} = 7700$, beim Versuche (10) ist es 2500.

2) Hall gibt die Einheiten, die seinen Messungen zu Grunde liegen, nicht an; indess ist es zweifellos, dass es Centimeter, Gramm, Secunde sind; die Intensität des Magnetfeldes wird in Vielfachen der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus angegeben, und für diese heisst es, dass sie gleich sei 0,19 (approximately). Ebenso sprechen dafür die von Hall mitgetheilten Werthe für die Stärke des Stromes J , der durch die Goldplatte (von 2,1 S.-E. Widerstand) hindurchfloss; diese liegen zwischen 0,06 und 0,025, der Strom war durch einen Bunsen'schen Becher geliefert.

ungeheuren Geschwindigkeit, mit der sich electriche Impulse fortpflanzen. Es scheint dies ähnlich zu sein, wie etwa die Fortpflanzung eines Impulses in einer unausdehnnsamen Röhre, die mit einer sehr leicht beweglichen Flüssigkeit erfüllt ist; während sich der Impuls zur Bewegung mit sehr grosser Geschwindigkeit in der Flüssigkeit fortpflanzt, kann die Progressivbewegung der Flüssigkeitstheilchen selbst sehr langsam sein.

Was die Richtung des durch die magnetische Einwirkung auf die Goldplatte hervorgerufenen Stromes i in ihrer Abhängigkeit von der Polarität des Magnets und von der Stromrichtung J in der Platte selbst betrifft, so macht Hall darüber (p. 290) folgende Bemerkung: „If we regard an electric current as a single stream flowing from the positive to the negative pole, i. e. from the carbon pole of the battery throug the circuit to the zinc pole, in this case the phenomena observed indicate that two *currents*, parallel and in the same direction, tend to repel each other. If on the other hand, we regard the electric current as a stream flowing from the negative to the positive pole, in this case the phenomena observed indicate that two *currents* parallel and in the same direction tend to attract each other.“

It is of course perfectly well known, that two *conductors*, bearing currents parallel and in the same direction, are drawn toward each other.“

Hat nämlich der positive, d. h. der beim Kupfer (Kohle) aus dem Element herauskommende Strom J die Richtung des gefiederten Pfeiles P (Taf. IV Fig. 14), so ist die Richtung des durch die Magnetwirkung zu Stande gekommenen Stromes i die durch die Pfeile p bezeichnete, d. h. der Strom i fliesst so, als ob die Goldplatte ein Element geworden wäre, wobei k den Kupferpol, h den Zinkpol und f die Flüssigkeit vorstellte. Dabei befindet sich der Südpol des Electromagnets vor der Platte, der Nordpol hinter derselben.

Man erkennt sofort, dass diese Richtung des Stromes i mit der sogenannten Ampère'schen Regel nicht in Uebereinstimmung steht, dass nach letzterer vielmehr der Strom die entgegengesetzte Richtung haben müsste. Nimmt man hingegen an, dass die Electricität beim Zinkpole aus dem Element

herausfliesse, dass also in der Fig. 12 Taf. IV die Richtungen aller Pfeile und die Vorzeichen umgekehrt werden, so muss die Richtung des Stromes i so werden, wie sie die Beobachtung in der That ergibt, dass nämlich h den Zinkpol, k den Kupferpol eines Elementes vorstellt. Es bleibt dann die Ampère'sche Regel bestehen; schwimmt die Figur nach jener Richtung, nach welcher gemäss der bisherigen Anschauung der positive Strom (der beim Kupfer aus dem Element herauskommende) fliesst, so wird der Nordpol wieder zur Linken abgelenkt: da jedoch nach dem Obigen die Richtung des negativen Stromes die thatsächliche Bewegungsrichtung der Electricität zu sein scheint, so dürfte es zweckmässiger sein, die Figur in der Richtung des negativen Stromes schwimmen zu lassen, mit dem Gesicht der Nadel zugewandt, in welchem Falle dann der Südpol zur Linken der Figur abgelenkt würde. — Hall sagt zwar im Anschlusse an seine oben angeführten Worte: „Whether this fact, taken in connection with what has been said above, has any bearing upon the question of the absolute direction of the electric current, it is perhaps too early to decide“, indess scheinen die Beobachtungen doch die früher ausgesprochene Annahme bezüglich der Stromrichtung zu fordern. Unabhängig von der Annahme der Stromrichtung gilt für unser Phänomen die Regel, dass man, vom Südpole aus gesehen, von der Eintrittsstelle des Stromes J in die Platte zur Eintrittsstelle des Stromes i durch eine Bewegung entgegengesetzt jener des Uhrzeigers gelangt; das Gleiche gilt bezüglich der Austrittsstellen der Ströme J und i aus der Platte.

Zum Schlusse muss ich erwähnen, dass ich auch, jedoch bisher vergeblich, die Geschwindigkeit der Electricitätsbewegung in einer Aluminiumplatte zu bestimmen versuchte. Es gelang mir nämlich nicht, einen constanten Strom durch die Platte hindurchzusenden; dies mag wohl in der eigenthümlich flockigen Beschaffenheit, welche dünne Plättchen dieses Metalles zeigen, seinen Grund haben. Von höchstem Interesse aber wäre es, wenn Versuche mit sehr dünnen Flüssigkeitsschichten sich erfolgreich anstellen liessen.

V. *Methode für die Calibrirung eines zu galvanischen Messungen bestimmten Drahtes; beschrieben von W. Giese.*

Der im vorigen Hefte der Annalen enthaltene Aufsatz der Herren Strouhal und Barus über galvanische Calibrirung eines Drahtes hat Herrn Geheimrath Helmholtz veranlasst, mich mit Veröffentlichung der Methode zu beauftragen, welche nach einem von ihm angegebenen Plane in neuester Zeit zu dem gleichen Zweck im hiesigen physikalischen Institut angewendet worden ist. Das Verfahren hat vielleicht noch nicht denjenigen Grad von Verfeinerung erreicht, den es erreichen könnte. Nachdem aber die Frage nach einer einfachen, von vorausgegangenen anderweitigen Messungen unabhängigen Calibrirungsmethode einmal von neuem¹⁾ angeregt worden ist, soll in Kürze die Methode in der Form, zu der sie bis jetzt entwickelt worden ist, mitgetheilt werden.

Folgende Betrachtungen liegen dem Verfahren zu Grunde: Bei der in Taf. IV Fig. 13 dargestellten Drahtverbindung mögen sich in E und e zwei Elemente befinden, sodass, wenn die Drähte Aa und Bb entfernt würden, zwei von einander unabhängige vollständige Stromkreise I und II übrig bleiben würden. Sind die electromotorischen Kräfte und die Widerstände in allen Zweigen der Drahtcombination gegeben, so sind dadurch die Stromintensitäten bestimmt, speciell auch die im Zweige Bb , sie möge mit i bezeichnet werden. Umgekehrt wird man, wenn die Punkte A und B auf I verschoben werden, etwa nach A' , B' , und dabei i ungeändert bleibt, schliessen dürfen, dass der Widerstand zwischen A' und B' gleich jenem zwischen A und B sei. Fällt insbesondere A' mit B zusammen, so wird durch diesen Punkt der Widerstand auf der Strecke AB' halbirt. Somit ist man im Stande, durch Vergleichung zweier Stromintensitäten einen gegebenen Widerstand zu halbiren. Indem man auf die gewonnenen Hälften fortgesetzt dasselbe Verfahren anwendet, kommt man zu einem Calibrirungsverfahren, welches

1) Dehms, Brix Z. S. 13. p. 270, hat schon 1866 die Grundzüge einer derartigen Methode gegeben.

dem von Rudberg¹⁾ für Thermometer angegebenen analog ist, insofern aber unmittelbarer zum Ziel führt, als die gesuchten Punkte, welche den Widerstand in 2, 4, 8 gleiche Stücke theilen, hier unmittelbar abgelesen werden, während sie bei der Calibrirung von Thermometern erst berechnet werden müssen, nachdem durch die Messungen selbst ermittelt ist, wie weit der benutzte Quecksilberfaden von der gewünschten Länge abweicht. In der That ist auch bei Herausbildung der Methode die Analogie mit der Thermometercalibrirung und besonders mit dem Rudberg'schen Verfahren der leitende Gedanke gewesen.

Für die praktische Ausführung werden die einzelnen Theile in der durch Taf. IV Fig. 16 dargestellten Weise angeordnet: Im Stromkreise I ist zwischen P und Q der zu calibrirende Draht ausgespannt, im Kreise II zwischen a und c ein beliebiger Hilfsdraht; dessen eines Ende a und ein passend zu wählender Punkt b sind mit den Näpfen 1, resp. 2 einer Pohl'schen Wippe verbunden, in der Leitung $b2$ befinden sich ein Galvanometer G und ein Stromschlüssel σ . Soll nun auf dem Draht PQ der Widerstand AB' halbiert werden, so hat man A mit Napf 3, B' mit Napf 6 der Wippe zu verbinden, die Näpfe 4 und 5 aber mit einem auf PQ verschiebbaren Contact M . Denkt man zunächst durch die Wippe die Verbindungen 13 und 24 hergestellt, d. h. aA und bM , so kann b leicht so eingestellt werden, dass die Ablenkung in G , wenn σ geschlossen wird, eine sehr geringe ist. Wird nun die Wippe umgelegt und dadurch a mit M ,

1) Rudberg, Pogg. Ann. 40. p. 567. 1837. Rudberg gibt zwei Schemata, nach denen verfahren werden kann; hier ist auf das zweite Bezug genommen. Will man aus irgend welchem Grunde den Widerstand gerade in drei gleiche Stücke theilen, so kann man das nach dem obigen Principe auch. Sollte z. B. ein 1000 mm langer Draht calibriert werden, so würde man von der Strecke 0 bis 333,3 ausgehend, die Strecke 333,3 bis x_1 zu suchen haben, deren Widerstand dem der ersteren gleich ist, und ebenso die entsprechende Strecke x_2 bis 1000. Aus der Differenz $x_1 - x_2$ ergibt sich, um wie viel die erste Strecke zu kurz war, und darnach werden durch einen neuen Versuch oder Rechnung, ganz wie bei Thermometern, die Punkte $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ gefunden.

b mit B' verbunden, so entspricht das der Verschiebung der Punkte AB nach $A'B'$ in Taf. IV Fig. 15, d. h. es wird die Galvanometernadel nur dann in ihrer früheren Stellung bleiben, wenn die Widerstände AM und MB' gleich sind, vorausgesetzt, dass die Summen der Widerstände $a13A + M42b$ und $a15M + B'62b$ nicht verschieden sind. Bei schwachem Strom und grossem Widerstand im Galvanometerzweig werden indessen kleine Unterschiede unschädlich sein. Man hat also den Contact M zwischen A und B' so einzustellen, dass das Umlegen der Wippe keine Wirkung auf das Galvanometer ausübt.

Stillschweigend ist im Vorigen die Annahme gemacht, dass die electromotorischen Kräfte bei E und e constant seien. Diese Voraussetzung lässt sich in Wirklichkeit nicht erfüllen, es werden sich daher die Stromintensitäten in den zwei Kreisen mit der Zeit etwas ändern, also auch der durch den Galvanometerzweig fliessende Strom i . Diese Schwankungen beeinträchtigen aber die Sicherheit im Einstellen von M durchaus nicht, wofern sie nur nicht so gross und unregelmässig werden, dass sie die durch Umlegen der Wippe auf die Galvanometernadel ausgeübten Stösse verdecken. Wenn nicht ganz besonders hohe Anforderungen an die Feinheit der Calibrirung gestellt werden, dürften schon gewöhnliche Daniell'sche Elemente ausreichend constante Ströme liefern.

Es könnte gegen das beschriebene Verfahren eingewendet werden, dass es die Anwendung dauernder Ströme bedinge, welche den Draht erwärmen und zwar ungleichmässig, da in mehr Widerstand bietenden Stellen mehr Wärme entwickelt werde, und da, was grösseren Einfluss haben könnte, an den Contactstellen und dort, wo der Draht befestigt sei, mehr von dieser Wärme durch fremde Körper abgeleitet werden würde, als an freiliegenden. Am einfachsten war es, hierüber durch den Versuch zu entscheiden: Die etwa vorhandenen Temperaturdifferenzen müssten dem Quadrat der Stromstärke proportional, und daher die durch sie verursachten Fehler bei stärkeren Strömen viel grösser sein. Gibt aber die Calibrirung für zwei Ströme sehr verschiedener

Stärke merklich gleiche Resultate, so ist die fragliche Fehlerquelle ohne Einfluss gewesen.

Nachdem Versuche an Drähten von 1000 mm Länge keine Abhängigkeit der Calibrirung von der Stromstärke hatten erkennen lassen, wurde der Versuch an einem ungefähr 2900 mm langen Neusilberdraht wiederholt, der aus 3 Stücken bestand, einem mittleren von 1500 und zwei seitlichen von 700 mm Länge. Die drei Theile waren unter einander und mit den Zuleitungsdrähten durch auf einem starken Brett befestigte Neusilberklötze verbunden, um thermoelectromotorische Kräfte wenigstens innerhalb des zu untersuchenden Leiters selbst ganz auszuschliessen; die Drahtstücke waren mit den Klötzen verlöthet. Unter dem mittleren Theil, der allein calibrirt werden sollte, war auf dem Brett eine Millimeterscala aufgeklebt, auf der von einem Ende angefangen bis zum andern durchgezählt wurde, von 0 bis 1500. Die auf ihr abgelesenen Zahlen werden als abgelesene Scalentheile bezeichnet.

Die Contacte bei *A, M, B* bestanden in 0,25 mm dicken Neusilberdrähten, welche den ausgespannten kreuzten. Sie waren an 4 cm breiten, 9 cm langen, mit Bleigewichten von $1\frac{1}{2}$ Pfund beschwerten Rahmen aus Holzbrettchen ausgespannt, sodass ihre Stellung gegen die Scala von oben durch eine auf die Bleigewichte gekittete Convexlinse von 2 Zoll Brennweite abgelesen werden konnte, während die Beleuchtung von vorn durch einen kleinen in der Mitte durchbrochenen Spiegel unter der Linse bewirkt wurde, der um 45° gegen die Verticale geneigt war. Taf. IV Fig. 17 zeigt solchen Contactschlitten von vorn gesehen, bei *D* den am Rahmen *K* befestigten Draht, bei *B* die Bleiklötze, Spiegel und Linse bei *S* und *L*. So liess sich die Ablesung mit ziemlicher Sicherheit auf 0,05 mm treiben, die Empfindlichkeit des Galvanometers würde noch genauere Einstellung erlaubt haben.¹⁾ Die Contactdrähte *D* waren weiterhin mit

1) Damit durch die Benutzung von drei Schlitten nicht Irrthümer entstehen, muss man sich überzeugen, dass sie, wenn sie an derselben Stelle berühren, auch gleiche Ablesung ergeben. Für die Mitte des

langen stärkeren Neusilberdrähten verlöthet, welche zur Verbindung mit den Kupferdrähten der übrigen Leitung dienten. Die Berührungsstellen von Neusilber und Kupfer lassen sich so besser vor Wärmestrahlung schützen, als wenn sie dicht an dem Schlitten selbst liegen. Der Widerstand in der Galvanometerleitung betrug nie weniger als 100 S.-E., sodass ein Einfluss von Unregelmässigkeiten in den verschiebbaren Contacten auf die Stromstärke im Galvanometer nicht zu befürchten war; übrigens wurde dafür gesorgt, dass bei der letzten, feinen Einstellung der Schlitten die mit Fernrohr und Spiegel beobachtete Ablenkung nur wenige Scalentheile betrug.

Mit diesem Apparat wurden zwei Calibrirungen des mittleren Drahtstückes vorgenommen, wobei dasselbe in Abschnitte, die $\frac{1}{16}$ des Gesamtwiderstandes gleich kamen, getheilt wurde. Bei beiden Versuchen wurde im Kreise I dasselbe Element benutzt, der Widerstand betrug im ersten Falle 91,4 S.-E., im zweiten 11,4, sodass die Stromintensitäten sich wie 1:8 verhielten, und die von der Stromwärme herrührenden Temperaturdifferenzen auf dem Neusilberdraht sammt den durch sie verursachten Fehlern im zweiten Falle 64mal so gross wie im ersten sein mussten. Die folgende Tafel giebt in der 2. und 3. Columnne die abgelesenen Scalentheile, welche den Draht in der durch Columnne 1 gekennzeichneten Weise theilen. Nimmt man an, der Draht sei genau 2936 mm lang gewesen, wovon auf die Strecke vom Anfang des Drahtes bis zum 0.-Punkt der Scala unter dem mittleren Stück 721 mm kommen mögen, so wäre 721 zu den abgelesenen Scalentheilen zu addiren, um den Abstand vom Anfang des Drahtes zu erhalten, wie das in Columnne 4 für die Zahlen des zweiten Versuchs geschehen ist, während die Werthe bei einem gleichmässigen Draht die in Columnne 5 sein müssten. Die letzteren wären also die berichtigten Scalentheile, sie werden aus den abgelesenen

Drahtes gaben Schlitten 1: 745,9, Schlitten 2: 745,9, Schlitten 3: 745,95, in den beiden ersten Fällen entstand aber Zweifel, ob nicht 745,95 abzulesen gewesen wäre.

erhalten, wenn man zu diesen 721 und die in Columne 6 gegebenen Correctionen addirt.

Widerstand v. Anfang bis zum Schlitten	abgelesene Scalentheile		Abstand vom Anfang	berichtigte Scalentheile	Correction
	1. Versuch	2. Versuch			
$\frac{1}{4} W$	13,05	13,0	734	734	± 0
$\frac{5}{16}$	197,2	197,2	918,2	917,5	-0,7
$\frac{3}{8}$	379,9	379,95	1100,95	1101	+0,05
$\frac{7}{16}$	561,8	561,9	1282,9	1284,5	+1,6
$\frac{1}{2}$	745,95	745,95	1466,95	1468	+1,05
$\frac{9}{16}$	929,8	929,8	1650,80	1651,5	+0,7
$\frac{5}{8}$	1114,0	1114,0	1835	1835	± 0
$\frac{11}{16}$	1297,85	1297,95	2018,95	2018,5	-0,45
$\frac{3}{4}$	1480,1	1480,2	2201,2	2202	+0,8

Die Uebereinstimmung zwischen den Einstellungen der zwei Versuchsreihen reicht aus, um alle Bedenken gegen Anwendung permanenter Ströme zu beseitigen, mindestens für Ströme wie den im ersten Versuch benutzten. Wahrscheinlich ist aber die zweite Reihe zuverlässiger, weil bei geringerer Stromstärke die thermoelectrischen Kräfte, welche in den Zweigen $3A, 45M, 6B'$ (Taf. IV Fig. 16) etwa ihren Sitz haben, mehr ins Gewicht fallen. Dass solche vorhanden waren, liess sich durch Oeffnen der Schlüssel bei s und S feststellen. Dann wirkten die Thermoströme allein auf das Galvanometer, und durch Umlegen der Wippe wurde bestimmt, welchen Einfluss sie etwa auf die Einstellung von M gehabt haben könnten. Ueberstieg der Ausschlag beim Umlegen den Betrag, welcher einer Verschiebung von M um 0,1 mm entsprach, so wurde gewartet, bis die Thermoströme verschwunden waren, und von neuem eingestellt. Indem man die drei Berührungsstellen von Neusilber und Kupfer in den oben genannten Zweigen durch eine gemeinsame Hülle gegen Strahlung schützte, liesse sich auch diese Fehlerquelle ganz beseitigen.

Um die Calibrirung noch auf andere Art zu prüfen, wurde nun der Draht zu zwei Widerstandsmessungen mit der Kirchhoff-Wheatstone'schen Drahtcombination benutzt, bei der ersten verhielten sich die zu vergleichenden Widerstände wie 1:3 ungefähr, bei der zweiten wie 3:5; die Messungen wurden mit momentanen Strömen ausgeführt.

Je nachdem der kleinere Widerstand mit dem einen oder anderen Ende des Drahtes verbunden wird, erhält man verschiedene Einstellungen. Diese waren:

Widerstände 1 : 3	1479,55	Widerstände 3 : 5	1113,8
	13,6		380,1

Indem man die Correctionen nach der Tafel anbringt, erhält man die berichtigten Scalentheile:

2201,35	1834,8
734,6	1101,15
<hr/> 2935,95	<hr/> 2935,95

Die Summe der zusammengehörigen berichtigten Scalentheile hätte gleich der berichtigten Gesamtlänge 2936 des Drahtes sein sollen.

Berlin, 7. Juli 1880.

VI. Ueber die Wirkung von Gasen und Dämpfen auf die optischen Eigenschaften reflectirender Flächen; von P. Glan.

Dass Gase und Dämpfe die physikalischen Eigenschaften der Oberflächen fester Körper ändern können, auch wenn sie nicht augenscheinlich chemisch auf sie einwirken, ist vielfach beobachtet worden. Man führt ihren Einfluss einmal darauf zurück, dass sie sich an den ihnen zugänglichen Theilen der Oberfläche verdichten und so die Körper mit einer Schicht dichterem Gases bedecken, die an ihnen haftet, auch unter Druck- und Temperaturverhältnissen, unter denen sich die Gase und Dämpfe sonst nicht niederschlagen pflegen, und nimmt als Grund dieser Verdichtung Molecularkräfte an, die nur in unmittelbarer Nähe der Oberfläche zwischen den Theilen des festen Körpers und denen der Gase und Dämpfe thätig sein sollen. Ihre Hauptstütze findet diese Annahme in der Entstehung der Hauchbilder und der Erklärung, die Waidele ihnen gegeben hat. Wir kennen indessen auch andere Einwirkungen zwischen Gasen und Dämpfen und festen Körpern; einmal findet ein wirkliches Eindringen derselben

auch in Körper statt, die nicht augenscheinlich porös sind, und dann haben chemische Einwirkungen statt. Die letzteren brauchen hierbei nicht sogleich bemerkbar zu sein, können aber doch mit der Zeit die Körper von der Oberfläche aus langsam verändern. Hierher sind wohl die allmählichen Aenderungen der Brechungsexponenten der Oberflächenschichten einiger festen Körper zu zählen, Aenderungen, die verschwinden, wenn man die Oberflächenschichten fortschleift, sodass neue, nicht mit der Luft in Berührung gewesene Schichten die Oberfläche bilden. So gibt es wenigstens Quincke für Quarzplatten, die 20 Jahre gelegen hatten, und für Glasplatten an. Die Art des Anschleifens muss hierbei wohl stets dieselbe sein, sollen frischgeschliffene Flächen von ein und demselben Stück immer den gleichen Werth des Brechungsexponenten ergeben. Wenigstens erwähnt Seebeck, dass er den Brechungsexponenten eines Glases, wie er sich aus der Beobachtung des Polarisationswinkels ergab, nach sechs und vierzehn Wochen unverändert gefunden habe, dagegen merklich anders, und zwar bald grösser, bald kleiner, wenn er dasselbe Glas mehrmals vom Mechaniker anschleifen liess. Auch Seebeck führt ein Beispiel an, dass frische Spaltungsflächen der Zinkblende andere Brechungsexponenten, wie sie sich aus dem Polarisationswinkeln ergeben, haben, als alte Flächen.

Der Einfluss der Politur auf die optische Beschaffenheit der Oberfläche ist für uns von Wichtigkeit, insofern er uns zeigt, dass wir gleiche optische Eigenschaften bei Oberflächen derselben Substanz nur dann erwarten können, wenn sie bei der Herstellung in völlig gleicher Weise mechanisch behandelt worden sind. Will man optisch gleiche Flächen haben, so ist es daher wohl am besten, eine Herstellungsart zu wählen, bei der eine starke mechanische Einwirkung auf die Substanz des Körpers überhaupt nicht stattfindet. Dieser Einfluss der Politur erklärt sich wohl daraus, dass während des Polirens in der Oberfläche Dilatationen entstehen, die die Elasticitätsgrenze überschritten haben und daher dauernde Dichtigkeitsänderungen zurücklassen; je nachdem hierbei der normale Druck oder tangentialer Zug der stärkere gewesen ist,

mögen dauernde Verdichtungen oder Verdünnungen zurückbleiben. Interessant wäre es, zu beachten, ob Körper, die geringe dauernde elastische Nachwirkung zeigen und diese nur nach der Einwirkung grosser Kräfte, weniger abhängig von der Art der Politur in Bezug auf die optischen Eigenschaften ihrer Oberflächen sind.

Die Versuche, welche die Aenderungen der Eigenschaften der Oberflächen der Körper unter der Einwirkung von Gasen oder Dämpfen darthun, seien nun diese Aenderungen die Folge einer wirklichen Absorption oder des Anhaftens einer condensirten Gasschicht oder die Folge von schwer nachweisbaren chemischen Einwirkungen, stimmen darin überein, dass Körper, die diese Einwirkungen erfahren haben, lange in ihrem veränderten Zustande beharren und nur durch besondere Mittel wieder von ihm befreit werden können. Nehmen wir also condensirte Gasschichten an ihren Oberflächen an, so müssen wir uns vorstellen, dass sie, einmal entstanden, lange an ihnen haften. In dieser Arbeit habe ich mir nun zunächst die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, ob Körper, die künstlich mit einer Atmosphäre von Kohlensäure umgeben wurden, sich optisch anders verhalten als solche, die nur der Luft ausgesetzt waren. Und zwar habe ich speciell untersucht, ob Silberplatten, mit einer Schicht Kohlensäure bedeckt, andere Phasenunterschiede bei der Reflexion erzeugen als Platten, die nur in der Luft gelegen hatten, und die man daher mit einer dichteren Luftschicht bedeckt denken muss.

Die Frage ist von Interesse für die Optik; der Nachweis eines solchen Einflusses würde nöthig machen, dass man bei der Bestimmung der Reflexionsconstanten besonders darauf achtet, welchen Gasen und Dämpfen die untersuchten Flächen seit ihrer Herstellung überhaupt ausgesetzt waren. Und auch die Theorie der Reflexion des Lichtes müsste einen allmählichen Uebergang aus dem einen Medium in das andere in Rechnung ziehen, wie es ja auch schon von Green angefangen und von Lorenz und v. d. Mühl in weiterem Umfange versucht worden ist.

Zunächst galt es, überhaupt festzustellen, wie weit sich aus demselben Material Flächen mit gleichen optischen Eigen-

schaften herstellen lassen ohne die verschiedene Einwirkung verschiedener Gase. Einmal musste hierbei die Politur ausgeschlossen werden, denn die Beobachtungen Seebeck's zeigen mit Sicherheit, dass verschiedener Druck bei derselben optisch verschiedene Flächen erzeugt. Ferner mussten die äusseren Bedingungen, unter denen die auf chemischem Wege nach dem Martin'schen Verfahren erzeugten Silberspiegel hergestellt wurden, möglichst gleich sein, denn Aenderungen der Temperatur und chemischen Beschaffenheit der Niederschlagsflüssigkeit ändern auch die Spiegel. Wenn man sich daher mehrere Spiegel auf Glasstücken aus derselben Platte zugleich in derselben Niederschlagsflüssigkeit bilden liess und den Silber-niederschlag so regelte, dass man ohne weiteres spiegelnde Flächen erhielt, die nicht polirt zu werden brauchten, so durfte man hoffen, Silberspiegel von möglichst gleicher optischer Beschaffenheit zu erhalten. Ich verfuhr danach folgendermassen:

Es wurden vier Glasplatten von etwa 1 qcm Oberfläche und 5—6 mm Dicke sorgfältig mit Salpetersäure gereinigt, mit destillirtem Wasser abgespült und zugleich in ein Gefäss getaucht, das mit Martin'scher Versilberungsflüssigkeit angefüllt war. Die Glasplatten wurden entweder auf ein Brett gekittet, das mit einem Stiel versehen war und an einem Statif befestigt werden konnte, oder auf den Boden des Gefässes gelegt. Im ersteren Falle wurden die Glasplatten von oben her so weit in die Flüssigkeit getaucht, dass die zu versilbernden Flächen etwa 2—3 mm unter der Flüssigkeitsoberfläche lagen, im zweiten Falle stand die Flüssigkeit ebenfalls 2—3 mm über ihnen. Nachdem sich die Silberspiegel durch Niederschlag aus der Flüssigkeit gehörig ausgebildet hatten, wurden zwei von ihnen herausgenommen, mit destillirtem Wasser abgespült und an der Luft getrocknet. Untersucht wurden sie auf den Phasenunterschied, den sie bei der Reflexion zwischen den beiden Hauptcomponenten erzeugten, und zwar in bekannter Weise mit dem Jamin'schen Compensator. Die Versuchsanordnung war folgende. Das Collimatorrohr eines kleinen Goniometers mit verticalem Theilkreis und Ablesungen auf halbe Minuten trug am vorderen Ende einen Nicol mit Theilkreis. Aus dem

Beobachtungsfernrohr waren die Linsen herausgenommen, und auf sein inneres Ende der Compensator aufgesetzt, auf sein äusseres gleichfalls ein Nicol mit Theilkreis. Die Einstellung des Compensators und der Nullpunkt des Nicols geschah durch Beobachtung im reflectirten Licht einer Glasplatte, die parallel zur Drehungsaxe des Apparates eingestellt war. Beobachtet wurde im weissen Licht einer Gaslampe. Die Glasplatte wurde durch die Backen einer kleinen schraubstockartigen Vorrichtung gehalten, die auf der Mitte des Tischchens befestigt war; an ihre Stelle wurden die Silber Spiegel gesetzt, die somit dieselbe Lage wie jene hatten. Bei verschiedenen Einfallswinkeln wurden die beiden Röhren in entsprechender Weise im Theilkreis eingestellt und die Spiegel so gedreht, dass die Interferenzstreifen des Compensators in grösster Deutlichkeit erschienen. Die Lage des Interferenzstreifens wurde bei jedem Einfallswinkel durch vier, mitunter auch sechs Einstellungen am Compensator festgestellt. Wenn ich so denselben Silber Spiegel mehrmals in der beschriebenen Weise auf denselben Einfallswinkel einstellte, erhielt ich im Mittel als Gangunterschied in Tausent Wellenlängen:

i	30°	35°	40°
Erste Einstellung	0,032	0,038	0,059
Zweite Einstellung	0,032	0,038	0,061

Danach kann man die Unterschiede beurtheilen, die durch verschiedenartige Einstellung des Silber spiegels entstehen können. Wenn ich so je zwei Spiegel verglich, die in gleicher Weise und zu gleicher Zeit hergestellt waren, erhielt ich als Unterschied zwischen ihnen im Mittel aus sieben Versuchen, und als Maximal- und Minimalunterschied in Tausent Wellenlängen:

i	Mittel	Max.	Min.	i	Mittel	Max.	Min.
30°	6	10	0	60°	15	30	2
35°	8	14	3	65°	19	48	5
40°	7	14	2	70°	16	38	3
45°	9	18	1	75°	16	36	4
50°	12	28	2	80°	11	25	6
55°	16	25	5	85°	18	18	18

Bei dem benutzten Compensator entsprachen einem Gangunterschied von einer Wellenlänge eine Drehung der Schraube des Compensators um 400 Scalentheile. Hervorheben will ich noch, dass der zweite Spiegel meist einen Tag später als der erste untersucht wurde und daher länger dem Einfluss der Luft ausgesetzt war. Ich fand wohl den Gangunterschied an ihm öfter grösser als kleiner, als an dem zuerst untersuchten, aber doch nicht in so überwiegender Mehrzahl, dass ich daraus auf einen veränderten Einfluss der Luft im Laufe eines Tages hätte schliessen können. Die Dicke der Spiegel, die für zu verschiedener Zeit bereitete Spiegel verschieden war, und die durch Aufdrücken einer Glaslinse auf die nach der Untersuchung des Phasenunterschiedes zur Hälfte von Silber befreiten Spiegel aus den dann gleichzeitig auf Silber und Glas sichtbaren Newton'schen Ringen bestimmt wurde, war stets grösser als $0,1\lambda_D$, also grösser als die Dicke, bis zu der sich nach Quincke Polarisationswinkel und Hauptazimuth mit der Dicke ändern. Sie schwankte bei verschiedenen Spiegeln zwischen $0,2\lambda_D$ und $1,7\lambda_D$, für die zu gleicher Zeit bereiteten Spiegel war sie meist wenig verschieden.

Diejenigen Versuche, aus denen man geglaubt hat, auf das Vorhandensein einer verdichteten Gasschicht an der Oberfläche der Körper schliessen zu können, stimmen darin überein, dass eine solche, einmal entstanden, lange an den Körpern haftet, auch wenn sie in eine Atmosphäre gebracht werden, die von derjenigen verschieden ist, in der sich die Schicht gebildet hat. Und die Untersuchungen von Waidele über die Entstehung der Hauchbilder auf Silberplatten zeigen, dass die Bedeckung einer frisch polirten Platte mit kohlen-säurehaltigem Kohlenpulver in dem Zeitraum von 1 bis 2 Minuten genügt, um die Eigenschaften ihrer Oberfläche zu ändern, also sie, im Sinne der Waidele'schen Erklärung, mit einer Schicht verdichteter Kohlensäure zu bedecken.

Danach stellte ich meine Versuche in folgender Weise an. Vier Glasplatten wurden in der vorher beschriebenen Weise zugleich, nach sorgfältiger Reinigung mit Salpeter-

säure in ein Gefäss mit Versilberungsflüssigkeit getaucht und versilbert.

Zwei von ihnen wurden herausgenommen, mit destillirtem Wasser abgespült, und so, dass die versilberten Flächen vertical standen, auf Fliesspapier gesetzt und an der Luft getrocknet; die beiden anderen wurden unmittelbar darauf ebenso gereinigt und in derselben Weise mit ihren versilberten Flächen vertical auf den Boden eines grossen Becherglases gelegt, ebenfalls auf Fliesspapier. Dieses Becherglas war mit Kohlensäure gefüllt und mit einer Glasplatte bedeckt, die das Eindringen der Luft erschwerte; das Gefäss wurde von Zeit zu Zeit von neuem mit Kohlensäure gefüllt, sodass die Platten stets einige Stunden in Kohlensäure lagen. Die ersten Platten konnten sich danach mit einer verdichteten Luftschicht bedecken, die zweiten, die nach ihrer Versilberung mit Luft gar nicht in Berührung gewesen waren, mit einer Schicht verdichteter Kohlensäure, und es liess sich untersuchen, ob die Kohlensäureatmosphäre in der die letzteren getrocknet waren, ihre optischen Eigenschaften verändert hatte.

Von je zwei zugleich hergestellten Silberspiegeln, die in Kohlensäure gelegen hatten, wurde der eine oft einige Stunden, der andere einen, oder in einigen Fällen selbst zwei und drei Tage nach der Herstellung untersucht, aber ich habe auch nicht die Andeutung eines Einflusses der Zeit gefunden, wie er sich bei den an der Luft getrockneten Spiegeln vielleicht bemerkbar gemacht hatte, der erzeugte Phasenunterschied fand sich für gleiche Einfallswinkel ebenso oft beim ersten, als beim zweiten Spiegel etwas grösser.

Bei den ersten drei Versuchsreihen hatte ich die Kohlensäure, die aus weissem Marmor durch Chlorwasserstoffsäure entwickelt wurde, durch ein längeres Glasrohr aus dem Entwicklungsapparat unmittelbar auf den Boden des Becherglases geleitet und das Gas langsam aus dem Gasentwicklungsapparat austreten lassen, sodass ein Mitfortreissen der Flüssigkeit möglichst vermieden wurde. Ich erhielt dabei einmal stets ziemlich grosse Unterschiede der Phasendifferenz zwischen den beiden gleichzeitig bereiteten Spiegeln, die in

Kohlensäure gelegen hatten, und dann waren in allen drei Versuchsreihen die Mittel der an diesen beiden Spiegeln erhaltenen Werthe grösser als diejenigen, welche an den beiden gleichzeitig bereiteten, aber in der Luft getrockneten Spiegeln erhalten wurden. Ich hebe hervor, dass die beiden ersteren im allgemeinen kein merklich anderes Aussehen hatten; sie waren vielleicht etwas gelblicher als die an der Luft getrockneten, aber kaum erheblich viel. Ich gebe hier ein Beispiel: die Tabelle gibt die Werthe des erzeugten Gangunterschiedes für die vorgesetzten Einfallswinkel für weisses Licht. Sie enthält zugleich die Mittel aus den beiden Spiegeln in Kohlensäure und in Luft und in der letzten Reihe die Differenzen dieser Mittel. Silber in Kohlensäure, weniger Silber in Luft. Die Gangunterschiede sind in Wellenlängen angegeben:

Tabelle 1. Ag.

i	in CO ₂	in CO ₂	Mittel	in Luft	in Luft	Mittel	Δ
30°	0,034	0,048	0,041	0,025	0,032	0,028	+0,013
35°	0,053	0,070	0,061	0,044	0,055	0,049	+0,012
40°	0,068	0,093	0,080	0,060	0,068	0,064	+0,016
45°	0,090	0,122	0,106	0,080	0,090	0,085	+0,021
50°	0,120	0,158	0,139	0,104	0,117	0,110	+0,019
55°	0,153	0,205	0,179	0,135	0,152	0,142	+0,037
60°	0,180	0,245	0,212	0,164	0,180	0,172	+0,040
65°	0,219	0,292	0,255	0,202	0,214	0,208	+0,047
70°	0,270	0,332	0,301	0,252	0,265	0,258	+0,043
75°	0,328	0,387	0,357	0,302	0,317	0,309	+0,048
80°	0,394	0,424	0,409	0,370	0,376	0,373	+0,036
85°	0,443	0,456	0,449	0,434	0,452	0,443	+0,006

Da indessen die geringen Mengen Chlorwasserstoffsäure, die die Kohlensäure bei diesen Versuchen vielleicht erhalten hatte, die Oberflächen der Silberspiegel chemisch verändert haben konnten und hierdurch möglicher Weise der Unterschied des erzeugten Gangunterschiedes entstanden war, so liess ich in den folgenden Versuchen das entwickelte Gas erst langsam durch eine mit Wasser gefüllte Waschflasche gehen, um es von der Chlorwasserstoffsäure zu befreien. Ich stellte in dieser Weise sechs Versuchsreihen an. Bei allen wurden vier Silberspiegel zugleich hergestellt, zwei von ihnen an der Luft getrocknet und zwei in einer Atmosphäre von Kohlen-

säure, die von Chlorwasserstoffsäure frei war. Diese Spiegel wurden dann in der angegebenen Art und Weise mit dem Compensator untersucht. Hierbei zeigte sich kein Unterschied mehr zwischen dem an der Luft und den in reiner Kohlensäure getrockneten Spiegeln. Ich theile hierfür zwei Beispiele mit.

Tabelle 2. Ag.

i	in CO ₂	in CO ₂	Mittel	in Luft	in Luft	Mittel	Δ
30°	0,026	0,025	0,025	0,025	0,030	0,027	-0,002
35°	0,039	0,039	0,039	0,036	0,039	0,037	+0,001
40°	0,059	0,057	0,058	0,047	0,057	0,052	+0,006
45°	0,078	0,074	0,076	0,076	0,077	0,076	$\pm 0,000$
50°	0,106	0,097	0,101	0,095	0,102	0,098	+0,003
55°	0,132	0,123	0,127	0,137	0,132	0,134	-0,007
60°	0,168	0,163	0,165	0,167	0,165	0,166	$\pm 0,000$
65°	0,203	0,195	0,199	0,199	0,194	0,196	+0,002
70°	0,258	0,247	0,252	0,254	0,247	0,250	+0,002
75°	0,310	0,297	0,303	0,294	0,298	0,296	+0,007
80°	0,365	0,352	0,358	0,356	0,362	0,359	-0,001

Tabelle 3. Ag.

i	in CO ₂	in CO ₂	Mittel	in Luft	in Luft	Mittel	Δ
30°	0,043	0,043	0,043	0,040	0,049	0,044	-0,001
35°	0,057	0,057	0,057	0,049	0,063	0,056	+0,001
40°	0,076	0,073	0,074	0,071	0,085	0,078	-0,004
45°	0,104	0,095	0,099	0,092	0,110	0,101	-0,002
50°	0,136	0,131	0,133	0,115	0,141	0,128	+0,005
55°	0,163	0,157	0,160	0,145	0,170	0,157	+0,003
60°	0,201	0,191	0,196	0,180	0,210	0,195	+0,001
65°	0,234	0,227	0,230	0,208	0,256	0,232	-0,002
70°	0,277	0,278	0,277	0,204	0,302	0,283	-0,006
75°	0,323	0,323	0,323	0,310	0,346	0,328	-0,005
80°	0,380	0,383	0,381	0,375	0,400	0,387	-0,006

Danach wurden also die frisch bereiteten Silberspiegel durch reine Kohlensäure nicht verändert, soweit es sich um den bei der Reflexion an ihnen erzeugten Phasenunterschied zwischen den beiden Hauptcomponenten eines Lichtstrahles handelt, dagegen scheint nach den ersten Versuchen eine Aenderung einzutreten, wenn sie einer Atmosphäre ausgesetzt werden, die Dämpfe enthält, welche chemisch auf sie einwirken. Diese Einwirkungen können übrigens sehr geringe sein.

Um weiter zu verfolgen, ob der Aufenthalt einer Platte in Dämpfen, die nicht chemisch auf sie einwirken, ihre op-

tischen Eigenschaften, soweit sie sich in der Erzeugung eines Phasenunterschiedes zwischen den beiden Hauptcomponenten bei der Reflexion äussern, nicht ändert, stellte ich folgenden Versuch an:

Eine Glasplatte wurde versilbert und unmittelbar aus der Versilberungsflüssigkeit heraus in eine Atmosphäre von reiner Kohlensäure in einem Becherglase gebracht und dort getrocknet. Achtzehn Stunden nach der Versilberung untersucht, gab sie folgende Gangunterschiede:

30° 0,043 60° 0,179 70° 0,268.

Darauf liess ich sie frei an der Luft liegen und untersuchte sie nach zwei Tagen wieder. Ich erhielt:

60° 0,175 70° 0,264,

kaum andere Werthe wie vorher. Darauf bespülte ich sie mit destillirtem Wasser, ohne sie vom Messapparat zu nehmen, in horizontaler Lage, sodass die Wassertropfen auf ihr stehen blieben, und liess sie dann trocknen. Wieder untersucht ergab sie:

60° 0,188 70° 0,272,

Werthe, die sich von den vorigen um wenig mehr als die möglichen Fehler der Messung unterscheiden. Hierbei waren die Bedingungen für die Bildung einer anhaftenden Schicht verdichteten Wasserdampfes besonders günstig. Als ich sie dagegen den Dämpfen wässriger Chlorwasserstoffsäure aussetzte, sodass ihre Oberfläche mit einer sichtbaren Schicht Chlorsilber bedeckt war, zeigte sich eine merkliche Veränderung. Ich erhielt:

30° 0,059 60° 0,252 70° 0,328.

In Uebereinstimmung mit Früherem wird hier mit der chemischen Einwirkung der Chlorwasserstoffsäure auf die Oberfläche des Silbers der bei der Reflexion erzeugte Phasenunterschied grösser. Endlich habe ich auch noch in einer Versuchsreihe sowohl die Reflexion in Luft an Silber als in Glas an Silber untersucht. Wenn nämlich eine merkliche Absorption der Kohlensäure in das Silber hinein stattgefunden hätte, so konnten sich vielleicht bei der Reflexion in Glas an Silber, das Kohlensäure enthielt, andere Werthe des Phasenunter-

schiedes ergeben, als bei der Reflexion an lufthaltigem Silber. Auch das zeigte sich nicht. Die vier zugleich bereiteten Spiegel zeigten bei der Reflexion in Luft keinen Unterschied, und bei der in Glas ergaben sie Folgendes:

Tabelle 4.

i in Luft	i' in Glas	in CO_2	in CO_2	Mittel	in Luft	Δ
30°	$19^\circ 12'$	0,008	0,008	0,008	0,010	-0,002
35°	$22^\circ 10'$	0,011	0,015	0,013	0,012	+0,001
40°	$25^\circ 1'$	0,013	0,017	0,015	0,019	-0,004
45°	$27^\circ 43'$	0,025	0,026	0,025	0,032	-0,006
50°	$30^\circ 16'$	0,031	0,032	0,031	0,036	-0,005
55°	$32^\circ 37'$	0,039	0,040	0,039	0,047	-0,007
60°	$34^\circ 44'$	0,049	0,047	0,048	0,057	-0,009
65°	$36^\circ 36'$	0,056	0,056	0,056	0,079	-0,023

Wenn auch hier die Differenzen meist negativ sind, so sind sie doch zu klein, um aus ihnen auf das Vorhandensein eines wirklichen Unterschiedes zu schliessen. Bemerkt mag noch werden, dass die Dicke der drei Silberspiegel eine halbe Wellenlänge des Natronlichtes in der Luft betrug.

Erstrecken sich die vorigen Untersuchungen allein auf den Einfluss von Gasen und Dämpfen auf die Grösse des Phasenunterschiedes der beiden Hauptcomponenten eines Lichtstrahles bei der Reflexion, so theile ich jetzt noch einige Beobachtungen mit, die einen Einfluss auf die Phasenänderung der einzelnen Componente zeigen könnten. Es wäre vielleicht zu erwarten, dass sich auf diesem Wege ein Einfluss nachweisen liesse, der bei der Untersuchung mit der vorigen Methode nicht bemerkbar wurde, denn die Anlagerung einer condensirten Gasschicht erhöht die erste optisch wirksame Fläche, an der die Reflexion stattfindet, und könnte so die Phasenänderung bei der Reflexion beeinflussen, während die vorige Methode nur den Unterschied der Wirkung zu beobachten gestattet, den diese Gasschicht auf die beiden Hauptcomponenten ausübt.

Zuerst untersuchte ich den Einfluss eines längeren Liegens an der Luft. Platten verschiedener Substanzen wurden mit Alkohol gereinigt, mit reiner Leinwand getrocknet und mit einer gleichfalls gereinigten Glaslinse belegt. Gleich darauf mass ich den ersten, zweiten, mitunter auch den

dritten Ringdurchmesser, liess dann die Platten längere Zeit liegen und mass die Ringdurchmesser wieder; die Anlagerung einer Gasschicht oder eine Aenderung ihrer Dicke mit der Zeit hätte sich hierbei durch eine entsprechende Veränderung der Ringdurchmesser bemerkbar machen müssen. Ich erhielt folgende Resultate:

Tabelle 5.

Substanz	d_1	A_1	d_2	A_2	d_3	A_3	t
Glas . . .	1116 — 1106	— 10	1582 — 1576	— 6	—	—	1
„	866,5 — 879	12,5	1212 — 1239	27	—	—	1
„	471 — 468	— 3	649 — 643,4	— 5,6	787 — 788	1	1
„	444,5 — 442,5	— 2	325 — 322,5	— 2,5	—	—	1
Diamant .	977 — 986,3	9,3	1371 — 1382,4	11,4	—	—	1
Stahl . . .	484 — 486,5	2,5	691,5 — 691	— 0,5	846,5 — 842,5	— 4	1
Eisenglanz	736,5 — 730,3	— 6,2	1019,5 — 1013,8	— 5,7	1236,5 — 1240,6	4,1	1
„	350,5 — 351	0,5	495 — 499,5	4,5	—	—	1
Fuchsin .	560 — 586	26	816 — 838	22	—	—	1
„	293 — 296	3	446 — 460	14	—	—	1
„	296 — 296,5	0,5	460 — 460	0	—	—	1
„	345 — 330,5	— 5,5	520,5 — 514,6	— 5,9	—	—	1
„	499 — 502	3	—	—	—	—	1

In dieser Tabelle ist die Zeit in Tagen angegeben, die Ringdurchmesser in Scalentheilen der Trommel der Mikrometerschraube des Beobachtungsmikroskops; die einzelnen Beobachtungen sind mit diesen von verschiedenem Radius und unter verschiedenen Einfallswinkeln angestellt und miteinander nicht vergleichbar; die Beobachtungen fanden im Natronlicht oder dem einer Petroleumlampe statt, das durch rothes Glas gegangen war. Sie zeigen keinen merklichen Einfluss der Zeit, in der die Platten der Luft ausgesetzt waren, auf die Grösse der Phasenänderung bei der Reflexion; die Einstellungsfehler der mikroskopischen Messung für einen Ringdurchmesser gingen bis zu 4 und 6 Scalentheilen, und die meisten Beobachtungen bleiben unterhalb dieser Grenze. Die zweite Beobachtung am Glas und die erste am Fuchsin weichen allein erheblich ab. Die ihnen entsprechenden Werthe der Phasenänderung lassen sich in folgender Weise berechnen. Sind ϱ , ϱ' , ψ , ψ' , ι die Ringradien, Phasenänderungen und

Einfallswinkel zweier zusammengehöriger Messungen desselben dunklen Ringes, so hat man:

$$\frac{\varrho^2}{r} \cos i + \psi = (2n+1) \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\varrho'^2}{r} \cos i + \psi' = (2n+1) \frac{\lambda}{2},$$

und daraus:
$$\alpha = \left(1 - \frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\right) \left(\frac{(2n+1) \frac{\lambda}{2} - \psi}{\lambda}\right),$$

wenn man:

$$\psi' = \psi + \alpha \lambda$$

setzt. Für ψ kann man die Werthe setzen, die ich in einer früheren Arbeit¹⁾ angegeben habe, und erhält dann für Glas mit den Beobachtungen am ersten Ring:

$$\psi' - \psi = -\frac{1}{34} \lambda,$$

und aus denen am zweiten:

$$\psi' - \psi = -\frac{1}{11} \lambda;$$

entsprechend für Fuchsin:

$$\psi' - \psi = -\frac{1}{11} \lambda \quad \text{und} \quad \psi' - \psi = -\frac{1}{10} \lambda.$$

Hervorheben will ich übrigens, dass sich in allen diesen Messungen die Linse zwischen zwei zusammengehörigen Beobachtungen nicht verschoben hatte.

Bei diesen Beobachtungen könnte man einwerfen, dass der Einfluss einer Anlagerung einer verdichteten Luftschicht nicht zu erwarten war, da sie von vornherein mit einer solchen bedeckt gewesen waren, und die Reinigung durch Alkohol und das Abreiben mit reiner Leinwand sie nicht zu entfernen vermochte. Wenn man dagegen die Platten stark erhitzt, so muss man annehmen, dass sich die anhaftende Luftschicht entweder ganz oder doch theilweise entfernt. Die Versuche von Magnus über die scheinbare Zunahme der Ausdehnungscoefficienten bei seiner Bestimmung aus Gefässen mit grosser Oberfläche, gegenüber der aus Gefässen mit kleiner Oberfläche, sprechen geradezu dafür, dass die Körper bei höherer Temperatur einen Theil der in ihnen enthaltenen Gase abgeben, mögen sie nun dieselben in sich aufgenommen oder an ihrer Oberfläche verdichtet haben. Wenn man daher eine Glasplatte und Linse stark erwärmt,

1) Glan, Wied. Ann. 7. p. 640. 1879.

noch warm aufeinanderlegt, sogleich die Durchmesser misst und einige Zeit nach der Abkühlung wieder, so müsste sich im zweiten Falle eine Luftverdichtung bemerkbar machen, wenn sie überhaupt von optischem Einfluss ist. Ich theile hier einige solche Beobachtungen mit; die Gläser wurden auf einem Zinkblech, die reflectirenden Flächen in senkrechter Stellung stark erwärmt durch eine untergesetzte Spiritusflamme, dann noch heiss auf einander gelegt und sogleich der Durchmesser des ersten dunklen Ringes gemessen. Sie lagen hierbei auf einer horizontalen Unterlage, und die Beobachtung geschah im reflectirten Himmelslicht, während vor das Ocular des Mikroskops eines Ablesemikroskops von einem Goniometer mit Mikrometerbewegung ein rothes Glas gehalten wurde. Die Gläser wurden vor dem Erwärmen gut gereinigt und sorgfältig von Staub befreit, sodass sich gleich beim Auflegen der Linse auf die Gläsfläche der schwarze Fleck in der Mitte der Ringe zeigte. Die Gläser waren daher gleich von Anfang der Beobachtung an in Berührung, konnten sich daher im Laufe der Zeit nicht nähern, und es war eine Erweiterung der Ringe mit der Zeit wegen fehlender anfänglicher Berührung nicht zu befürchten. Ich theile im Folgenden die Zeit der ersten und zweiten Beobachtung und die zugehörigen Ringdurchmesser mit:

10 ^h 55 ^m	1000,4	1 ^h 38 ^m	1036
11 26	998,8	3 52	1035,9.

Es zeigte sich in beiden Beobachtungen keine merkliche Aenderung der Ringdurchmesser nach der Abkühlung und längerem Liegen an der Luft.

Auch wenn ich bei Wiederholung des Versuchs gleich nach der ersten Messung Schalen mit Wasser neben den Apparat setzte, sodass die Gläser beständig mit einer Atmosphäre von Wasserdampf umgeben waren, konnte ich selbst in Versuchsreihen, die sich über einen ganzen Tag erstreckten, keine höhere Zunahme der Ringdurchmesser mit der Zeit constatiren. Als Beispiel mögen hier einige Versuchsreihen mitgetheilt werden; sie enthalten ausser der Beobachtungszeit und den Ringdurchmessern das Datum der Beobachtung zur richtigen Beurtheilung der Zeitangaben.

Tabelle 6. Glas.

<i>t</i>	<i>d</i> ₁	—	<i>t</i>	<i>d</i> ₁	—	<i>t</i>	<i>d</i> ₁	—
9 ^h 50 ^m	995,4	24/6.	11 ^h 15 ^m	1015,8	25/6.	11 ^h 26 ^m	998,8	29/6.
12 56	998,4	—	11 36	1051,3	—	11 45	1000,8	—
6 57	1011,7	—	3 21	1053,4	—	5 —	1012,75	—
			6 45	1024,7	26/6.	7 —	1017,8	—
						9 37	1010	30/6.

Auch als ich in einem Versuch statt des Wassers eine Schale mit Petroleum neben den Apparat setzte, konnte ich keinen Einfluss bemerken. Ich erhielt:

3^h 52^m 1035,9 1/7., 8^h —^m 1032,6 2/7.

Und endlich gab auch eine Stahlplatte, in derselben Weise untersucht, kein anderes Resultat.

Tabelle 7. Stahl.

<i>t</i>	<i>d</i> ₁	—	<i>t</i>	<i>d</i> ₁	—	<i>t</i>	<i>d</i> ₁	—
10 ^h 35 ^m	930,4	5/7.	4 ^h 26 ^m	890,3	—	8 ^h 52,5 ^m	942,5	19/7.
4 12,5	918	—	8 19	916,1	12/7.	9 34	940,4	2/8.
9 21	930,5	6/7.	9 22	892,8	18/7.	7 25	960,9	3/8.
12 1	892,9	11/7.	4 12	933,5	—	9 26	976,6	—

Die drei ersten Versuchsreihen sind mit Wasser ange-
stellt, die letzte mit absolutem Alkohol; in letzterem Falle
wurde der Alkohol des raschen Verdampfens wegen mehr-
mals erneuert, doch nicht so rasch, dass nicht die Platte
stundenlang ohne Alkoholdämpfe in der sie umgebenden
Atmosphäre gewesen wäre. Hervorheben will ich übrigens,
dass in den beiden letzten Versuchsreihen am Glas und Stahl
zwischen zwei Messungen Verrückungen der Linse auf den
Platten vorkamen, doch bis auf eine Ausnahme waren sie so
klein, dass die Ringe stets im Gesichtsfelde des Mikroskops
blieben. Diese Verrückungen waren zum Theil wohl eine
Folge von Erschütterungen, die sich bei den mir zu Gebote
stehenden Beobachtungsräumen im Laufe eines Tages nicht
vermeiden liessen, zum Theil waren sie eine Folge der Tem-
peraturverschiedenheiten, die die Seitenflächen der aus Metall
bestehenden Unterlage der Linse und Platte durch die ab-
kühlende Wirkung der neben dem Apparat stehenden Scha-

len mit verdunstender Flüssigkeit erfuhren. Bei den Beobachtungen, von denen ich hier nur einige mitgetheilt habe, fand ich ebenso oft eine Abnahme als eine Zunahme der Ringdurchmesser mit der Zeit, Aenderungen, die wohl durch die geringen Verrückungen der Linse hervorgerufen sein konnten. Den Nachweis einer Abnahme der Dicke der Luftschicht zwischen Linse und Platte infolge einer Condensation von Dämpfen auf ihren Oberflächen, obwohl sie sich hier in doppelter Weise sowohl als Verdichtung auf der Linse als auf der Platte bemerkbar machen konnte, liefern auch diese Beobachtungen nicht. Quincke beschreibt in seinen optischen Untersuchungen mehrfach Erscheinungen, die er als eine Folge des verschieden starken Niederschlags von Dämpfen aus der Atmosphäre auf die verschiedenen Theile seiner Apparate ansieht. Sie bestehen in Verschiebungen der Interferenzstreifen, die einer Aenderung der Gangunterschiede um eine halbe Wellenlänge und mehr entsprechen, durch den Windstoss einer schnell geöffneten Thür, einen hastigen Athemzug des Beobachters entstehen und oft mit der Zeit wieder verschwinden. Diese Verschiebungen könnten ihren Grund sehr wohl auch in den Temperaturänderungen und den sie begleitenden Verschiebungen der Apparatheile gegeneinander haben, die durch den Luftzug hervorgerufen werden; mit ihrem Verschwinden würden sie gleichfalls aufhören oder, wenn sie andauern, dauernd bestehen bleiben.

Die vorliegende Untersuchung würde jedenfalls dafür sprechen, dass ein Einfluss von Gasen und Dämpfen auf die optischen Eigenschaften reflectirender Flächen, soweit sie sich in der Phasenänderung bei der Reflexion äussern, nicht stattfindet, wenn nicht Gase und Dämpfe chemisch auf sie einwirken oder sich in sichtbarer Menge niederschlagen, wie es unterhalb der Thaupunkttemperatur geschieht.

Berlin, den 22. Juli 1880.

VII. Ueber ein neues Interferenzphotometer; von Dr. Fr. Fuchs,

Privatdocenten für medicinische Physik in Bonn.

Bei Gelegenheit einer physiologisch-optischen Untersuchung bin ich zur Construction eines Photometers gelangt, bei welchem das Kriterium für die Gleichheit der Lichtstärken, wie bei dem Wild'schen Instrumente, durch das Verschwinden von Interferenzstreifen geliefert wird, ohne dass es indessen nöthig wäre, die Strahlen der beiden Lichtquellen senkrecht zu einander zu polarisiren.

Die Vorrichtung besteht einfach aus zwei einander gleichen, gleichschenkligen Glasprismen ABZ , ABZ' , Taf. IV Fig. 18, welche mit den Grundflächen AB aneinander gelegt werden.

Der horizontale Querschnitt des Doppelp Prismas ist also ein Rhombus $AZZZ'$. Den Prismenflächen AZ und AZ' parallel stehen die hinsichtlich ihrer Lichtstärke zu vergleichenden weissen Flächen bz und $b'z'$, welche verlängert sich in der verticalen, in der Fortsetzung der Ebene AB liegenden Kante a schneiden. aA ist ein Diaphragma, welches die gegenseitige Bestrahlung der Flächen bz und $b'z'$ verhindert. k ist der Knotenpunkt des beobachtenden Auges. Zwischen den Prismenflächen AB ist eine dünne Luftschicht eingeschlossen, deren Dicke sich durch einen auf die gegenüber stehenden Kanten ZZ' ausgeübten Druck noch weiter vermindern lässt.

Der leichteren Orientirung wegen werde die Dicke der Luftschicht AB zunächst als so gross vorausgesetzt, dass das von den Flächen bz und $b'z'$ kommende Licht keine Interferenzerscheinung hervorruft. Das bei k befindliche Auge sieht nun die Fläche bz direct und die Fläche $b'z'$ infolge der an der Luftschicht AB stattfindenden Reflexion. Es seien $rtsh$, lh , $bvwk$ diejenigen der von den Punkten r, l, b ausgehenden Strahlen, welche nach dem Durchgange durch das Prisma durch den Knotenpunkt k des Auges gehen. Aus der Figur ist unmittelbar ersichtlich, dass der Punkt

l , dessen Richtungsstrahl die Prismenflächen AZ , $Z'B$ senkrecht durchsetzt, in seiner wahren Lage gesehen wird, dass dagegen die rechts von l liegenden Punkte, wie n, p, r nach rechts und die links von l liegenden Punkte, wie b , nach links verschoben erscheinen. Bei der Construction der Strahlen ist übrigens zunächst keine Rücksicht darauf genommen, dass ein Strahl wie $bvwk$ im allgemeinen an der Luftschicht total reflectirt wird.

Die erwähnte Verschiebung ist in der Linie $\beta\zeta$ angedeutet, welche man indessen so auf die Linie bz gelegt denken muss, dass der Punkt λ mit dem Punkte l zusammenfällt.

Construirt man nun ferner den von der Fläche $b'z'$ ausgehenden Strahl $r't's$, welcher nach der Reflexion an AB in der Richtung suk fortschreitet, so gelangt man zu dem Punkte r' , dessen Bild auf die gleiche Netzhautstelle fällt, wie das des Punktes r . Es ist nun leicht nachzuweisen, dass die homologen Punkte r, r' , sowie auch die Strahlen $rt, r't's$ symmetrisch zu der Linie AB liegen. Denkt man den Strahl $r't's$ um die Linie AB als Axe gedreht, so kommt der Punkt t' mit dem Punkte t und r' mit r zur Deckung.

Hierbei kann füglich von der kleinen parallelen Verschiebung, welche der Strahl ts beim Durchgange durch die Luftschicht erleidet, abgesehen werden, da diese Verrückung wegen der geringen Dicke der Schicht zu klein ist, als das sich dadurch das Netzhautbild des Punktes r um die Breite eines Zapfens verschieben könnte.

Die homologen, von dem Punkte a gleich weit abstehenden Punktpaare rr', pp', nn', ll', bb' erscheinen also im Gesichtsfelde sich deckend bei $\varrho, \pi, v, \lambda, \beta$.

Die Einfallswinkel, unter denen die homologen Strahlen $rt, r't'$ auf die Prismenflächen AZ und AZ' fallen, sind von gleicher Grösse. Beide Strahlen werden somit beim Eintritte in das Prisma infolge der an AZ und AZ' stattfindenden Reflexion um den gleichen Bruchtheil ihrer Intensität geschwächt. Haben die Strahlen also vor dem Eintritte in das Prisma die gleiche Intensität, so ist dasselbe nach dem Eintritte ebenfalls noch der Fall.

Die Einfallswinkel $tsq, t'sq'$, unter denen die Strahlen

rt_s , $r't's$ auf die ihnen zugekehrte Seite der Luftschicht AB fallen, sind ebenfalls einander gleich.

Das Licht des Strahles ts zerfällt in zwei Theile; der eine derselben schreitet nach dem Durchgange durch die Luftschicht in der Richtung su fort, und der andere Theil wird infolge der an beiden Seiten der Luftschicht stattfindenden Reflexion in der Richtung sg zurückgeworfen.

Das Licht des Strahles $t's$ wird ebenfalls in zwei Theile zerlegt, von welchen der erste in der Richtung su reflectirt wird, und der andere in der Richtung sg durchgeht.

Sind nun i und i' die Intensitäten einer homogenen, in den Richtungen ts und $t's$ fortschreitenden Lichtart, so wird von i das Quantum αi in der Richtung su durchgelassen und das Quantum $(1 - \alpha) i$ wird in der Richtung sg reflectirt; von i' wird das Quantum $\alpha i'$ in der Richtung sg durchgelassen, und das Quantum $(1 - \alpha) i'$ wird in der Richtung su reflectirt. Die Intensität x des Strahles su ist also:

$$x = \alpha i + (1 - \alpha) i'.$$

Ist nun $i = i'$, so wird:

$$x = i.$$

Sind also die Intensitäten zweier homogenen Strahlen ts , $t's$ einander gleich, so ist auch die Intensität des Strahles su gleich der der Strahlen ts , $t's$.

Das gewöhnliche weisse Licht besteht aus einer grossen Zahl von homogenen Lichtarten. Auf eine jede derselben lässt sich die vorstehende Betrachtung anwenden. Hat demnach ein weisser Strahl ts dieselbe Gesamtintensität und dieselbe Zusammensetzung wie der homologe Strahl $t's$, so ist auch die Gesamtintensität und die Zusammensetzung des Strahles su gleich der der Strahlen ts , $t's$. In diesem Falle ist also der Strahl su rein weiss, wenn auch ein jeder der im Strahle su sich fortpflanzenden Antheile der Strahlen ts , $t's$ für sich infolge einer für einzelne Lichtarten eingetretenen totalen Reflexion oder infolge von Interferenz farbig erscheinen würde.

Da dieses die eigentliche Thatsache ist, auf welche die zu besprechende photometrische Methode sich gründet, so mag noch hervorgehoben werden, dass die eben ausge-

sprochene Behauptung auch für die Strahlen gilt, welche nicht in der Horizontalebene verlaufen. Denn ein jeder Strahl, welcher von der dem Auge zugewendeten Seite der Luftschicht an gerechnet das Prisma in irgend einer Richtung durchläuft, besteht aus zwei Theilen, von welchen der eine von einem Punkte der Fläche bz , und der zweite von einem homologen Punkte der Fläche $b'z'$ her stammt, und welche beide unter demselben Einfallswinkel auf die ihnen zugewendete Seite der Luftschicht AB gefallen sind. Diese beiden Theile sind daher genau complementär, sofern die von den beiden Flächen herkommenden Strahlen ursprünglich dieselbe Zusammensetzung hatten.

Wirft man nochmals einen Blick auf die Taf. IV Fig. 18, so bemerkt man, dass die Einfallswinkel, unter denen die von den homologen Punkten rr' , pp' ... ausgehenden Richtungsstrahlen auf die Luftschicht AB treffen, um so grösser werden, je näher die Punkte dem Punkte a liegen. Nun tritt bei einem gewissen von dem Brechungsexponenten der Glassorte abhängigen Einfallswinkel die totale Reflexion der Strahlen ein.

Der Einfallswinkel der totalen Reflexion ist aber für die einzelnen homogenen Lichtarten verschieden; er ist um so grösser, je grösser die Wellenlänge der betreffenden Strahlengattung ist. Es seien pp' die homologen Punkte der Flächen bz , $b'z'$, für welche die zum Auge gelangenden Lichtstrahlen kleinster Wellenlänge, und nn' seien die homologen Punkte, für welche die Strahlen grösster Wellenlänge totale Reflexion erleiden.

Der Leser wird jetzt leicht die Erscheinungen deuten können, welche sich dem bei k befindlichen Auge darbieten.

Wird die Prismenfläche AZ verdeckt, so sieht man die Fläche $b'z'$ in der durch die Linie $\beta\zeta$ angedeuteten Lage, wobei nochmals daran erinnert werden mag, dass die Linie $\beta\zeta$ in die Linie bz zu verlegen ist, und zwar derartig, dass der Punkt λ mit dem Punkte l coincidirt. Das links von dem Punkte ν liegende Feld erscheint wegen der hier stattfindenden totalen Reflexion ganzhell; das rechts von π liegende Feld ist halbhell. Zwischen beiden Gebieten läuft

in dem Bezirke $\nu\pi$ in der Richtung von oben nach unten ein etwas gekrümmter Streifen von vorwiegend grünblauer Farbe, deren Sättigung in der Richtung von π nach ν abnimmt.

Wird dagegen die Fläche AZ' verdeckt, so sieht man die Fläche bz wiederum in der Lage $\beta\zeta$, jedoch in geringerer Ausdehnung wie die vorige Fläche. Das Gesichtsfeld ist links von ν vollständig dunkel und rechts von π halbhell. Zwischen beiden Gebieten läuft ein vorwiegend rother Streifen $\nu\pi$, dessen Sättigung in der Richtung von π nach ν zunimmt.

Sind beide Prismenflächen unbedeckt, so erscheint links von ν das ganzhelle Feld der Fläche $b'z'$ und rechts von π superponiren sich die halbhellen Felder der beiden Flächen bz und $b'z'$. In dem Bezirke $\nu\pi$ decken sich die beiden farbigen Grenzen der totalen Reflexion.

Ist nun die eine der beiden Flächen bz , $b'z'$ lichtstärker als die andere, so ist der Streifen $\nu\pi$ gefärbt, und die nach rechts und links angrenzenden Felder sind verschieden hell. Wird dagegen die Lichtstärke der beiden Felder einander gleich gemacht, so verschwindet der Streifen, und das ganze Feld erscheint in gleichmässiger Helligkeit.

Man würde also schon das Verschwinden der farbigen Grenze als Kriterium für die Gleichheit der Lichtstärken benutzen können. Man gibt der Vorrichtung jedoch eine weit grössere Empfindlichkeit, wenn man die Dicke der Luftschicht AB durch leises Aneinanderpressen der Flächen soweit verkleinert, dass das von den Flächen bz , $b'z'$ kommende Licht infolge der an der Zwischenschicht stattfindenden Reflexionen in wahrnehmbarer Weise interferirt. Man kann die Interferenzerscheinung schon leicht durch Anziehen einer um das Doppelprisma geschlungenen Schnur hervorrufen. Verdeckt man dann die Prismenfläche AZ , so sieht man in dem Bezirke $\nu\zeta$ ein schönes System von stark gesättigten farbigen Streifen, welche mit leichter Krümmung in der Richtung von oben nach unten verlaufen.

In dem Gebiete der totalen Reflexion fehlen die Streifen selbstverständlicher Weise, da das Licht hier keine doppelte

Reflexion erleidet, und folglich auch kein Gangunterschied der Strahlen entstehen kann.

Verdeckt man dagegen die Prismenfläche AZ' , so bemerkt man — wiederum in dem Felde $\nu\zeta$ — ein zweites System von Interferenzstreifen, deren Farben indessen weniger gesättigt sind.

Durch abwechselnde oder theilweise Verdeckung der Prismenflächen kann man sich leicht überzeugen, dass beide Streifensysteme genau coincidiren und complementäre Färbung haben.

Lässt man beide Prismenflächen unbedeckt, so superponiren sich die beiden Streifensysteme.

Ist nun die Lichtstärke der einen der Flächen bz , $b'z'$ grösser als die der anderen, so kommt das ihr angehörige Streifensystem, wenn auch mit geringerer Sättigung der Farben, zur Erscheinung.

Wird aber das von der stärker leuchtenden Fläche ausgehende Licht durch eine der üblichen Methoden soweit geschwächt, dass die Lichtstärke der beiden Flächen die gleiche ist, so verschwinden die Streifen, und man hat dann ein vollkommen homogenes weisses Feld vor sich. Die Helligkeit des Gesichtsfeldes ist in diesem Falle eine derartige, als wenn man die Fläche bz durch den compacten Glaskörper $AZBZ'$ ohne Vorhandensein der Zwischenschicht betrachtete.

Muss die Lichtstärke der helleren Fläche auf den n ten Theil ihres Werthes reducirt werden, damit die Streifen sich der Wahrnehmung entziehen, so ist dieselbe n mal grösser als die der schwächer leuchtenden Fläche.

Die Indicationen für die Anwendung der Vorrichtung sind dieselben wie bei dem Wild'schen Photometer. Sie kann benutzt werden erstens, um monochromatische Flächen gleicher Farbe und zweitens, um weisse Flächen, welche Licht von ähnlicher Zusammensetzung ausgeben, hinsichtlich der Lichtstärken miteinander zu vergleichen. Die Vorrichtung würde beispielsweise nicht anwendbar sein, wenn das Weiss der einen Fläche aus monochromatischem Roth und Grünblau, und das der anderen aus Gelb und Blau zusammengesetzt wäre. Im concreten Falle wird es sich

immer bald entscheiden lassen, ob die zu prüfenden Lichter die geeignete Zusammensetzung haben, da man sich ja ohne Schwierigkeit davon überzeugen kann, ob die Interferenzstreifen zum Verschwinden gebracht werden können oder nicht.

Da man die beschriebene Vorrichtung mit den in einem jeden Laboratorium vorhandenen Hilfsmitteln sofort zusammenstellen und die Brauchbarkeit derselben einer Prüfung unterwerfen kann, so glaube ich mir eine weitere Empfehlung des Verfahrens erlassen zu können. Ich möchte mir jedoch erlauben, noch einige, die Ausführung des Apparates betreffende Vorschläge zu machen mit dem Wunsche, dass sich irgend ein mit grösseren Mitteln arbeitender Optiker für die Construction des Apparates zu technischen Zwecken interessiren möge.

Soll die Vorrichtung benutzt werden, um die Leuchtkraft von Flammen zu vergleichen, so kann man ihr etwa die folgende Einrichtung geben.

Die Prismen stehen in einem geschlossenen, inwendig geschwärzten Kasten, welcher bei k in unmittelbarer Nähe der Prismenfläche $Z'B$ eine Oeffnung für das Auge des Beobachters hat.

In zwei grösseren Oeffnungen sind zwei gleichförmig bearbeitete Platten von Glas oder Milchglas eingesetzt, deren äussere Seite matt geschliffen ist. Diese Platten haben die Stellung der Flächen bz , $b'z'$. Ihre Entfernung von dem Prisma muss eine derartige sein, dass sich das Auge bequem für dieselben accomodiren kann. Ein Diaphragma aA schützt die Platten vor der gegenseitigen Bestrahlung.

Es ist zweckmässig, die Winkel an den Grundflächen der gleichschenkligen Prismen nach Maassgabe des Brechungsexponenten der verwendeten Glassorte derartig zu wählen, dass der Strahl lck , welcher, die Prismenflächen AZ , $Z'B$ senkrecht schneidend, zu dem Mittelpunkte der für das Auge bestimmten Oeffnung geht, unter dem Einfallswinkel der totalen Reflexion auf die Luftschicht AB fällt.

Damit aber dieser Forderung genügt sei, müssen die Winkel ZAB , ZBA , $Z'AB$, $Z'BA$ gleich sein dem Einfallswinkel, für welchen die Strahlen mittlerer Brechbarkeit

beim Uebergang von Glas in Luft totale Reflexion erleiden. Denn der Winkel ZAB ist ja gleich dem Einfallswinkel dcl . Ist nun n der Brechungsexponent der betreffenden Glasorte für die Linie D , so ist der in Rede stehende Einfallswinkel α bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin \alpha = \frac{1}{n}.$$

In der folgenden Tabelle sind eine Reihe von zusammengehörigen Werthen von n und α zusammengestellt.

α	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	44°	45°
n	1,743	1,701	1,662	1,624	1,589	1,556	1,524	1,495	1,466	1,440	1,414

Ist also beispielsweise der Brechungsexponent der zu verwendenden Glassorte für die Linie D gleich 1,524, so macht man zweckmässiger Weise die Winkel an den Grundflächen der Prismen gleich 41°. Alsdann erscheint dem gerade durch das Doppelpisma hindurchsehenden Auge der erste Interferenzstreifen bei dem Punkte l .

Bei Benutzung der gangbaren Glassorten, deren Brechungsexponent zwischen 1,7 und 1,5 liegt, ist der Winkel an der Basis der Prismen unter den günstigsten Versuchsbedingungen kleiner als 45°. Mithin werden alsdann die Winkel $Z'AZ$ und $z'az$ spitze sein. In der Figur sind diese Winkel als stumpfe gezeichnet worden, weil bei den angestellten Versuchen gleichseitige Flintglasprismen verwendet wurden. Unter diesen Umständen lag der erste Interferenzstreifen rechts vom Punkte l .

Möglicher Weise könnte man auch statt der Glasprismen mit Vortheil rechtwinklige Flüssigkeitsprismen mit planparallelen Glaswänden wählen. Der Brechungsexponent der Flüssigkeit müsste dann gleich 1,414 sein.

Wollte man statt der Luft irgend einen anderen Körper als Zwischenschicht benutzen, so wäre der Winkel α nach der Formel:

$$\sin \alpha = \frac{r}{n}$$

zu berechnen, worin r den Brechungsexponenten des betreffenden Körpers für die Linie D bedeutet.

Das die Prismen enthaltende Gehäuse wird auf einem Stativ befestigt, von welchem zwei mit Millimeterscalen versehene Arme rechtwinkelig zu den matten Glastafeln bz , $b'z'$ auslaufen. Auf diesen Armen werden die Träger der zu vergleichenden Lichtquellen verschiebbar angebracht, und zwar derartig, dass die Linie kcl und die correspondirende cl' in ihrer Verlängerung ungefähr durch die Mitte der Flammen hindurchgeht.

Die Untersuchung geschieht dann in der Weise, dass man der einen der Flammen eine feste Stellung gibt und die andere so lange verschiebt, bis die Interferenzstreifen verschwinden. Man kann natürlich auch die zu untersuchenden Flammen nach einander auf demselben Arme verrücken, während der anderen Platte eine dritte Lichtquelle gegenüber steht. Das erstere Verfahren ist vorzuziehen, wenn die matten Glastafeln von gleicher Beschaffenheit sind, wovon man sich leicht überzeugen kann. Stellt man nämlich ein Licht in der Verlängerung der Linie AB auf, so werden beide Platten in gleicher Weise beleuchtet. Unter diesen Umständen zeigt demnach das Fehlen oder Vorhandensein der Interferenzstreifen die Gleichheit oder Ungleichheit der Platten an.

Bringt man der Prismenfläche ZB gegenüber noch eine zweite Oeffnung an, so können gleichzeitig zwei Personen beobachten, welche dann natürlich complementäre Erscheinungen wahrnehmen werden.

Zum Schlusse erlaube ich mir, meinem verehrten Freunde Dr. Gieseler, Docenten an der landwirthschaftlichen Akademie in Poppelsdorf, meinen Dank für die bereitwillige Gewährung der zur Arbeit erforderlichen experimentellen Hilfsmittel auszusprechen.

VIII. *Ueber den Einfluss der Dichte der Gase auf die Wärmeleitung derselben;*
von A. Winkelmann.

Es ist schon vielfach darauf hingewiesen, dass die Werthe, welche die Beobachtung für die Wärmeleitung der Gase liefert, nicht unbeträchtlich von den Werthen abweichen, die sich aus der kinetischen Theorie der Gase ergeben.

Einen Grund für diese Nichtübereinstimmung konnte man besonders für die mehratomigen Gase, dessen specifische Wärme nicht unabhängig von der Temperatur ist, in dem Umstande erblicken, dass die zu vergleichenden Werthe sich nicht auf die gleiche Temperatur beziehen. Die Berechnung nach der Formel:

$$K = A \cdot \eta \cdot c,$$

in welcher A einen constanten Factor, η den Reibungscoëfficienten und c die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen bedeutet, setzt die Kenntniss der beiden letzten Grössen η und c in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur voraus, oder wenigstens die Kenntniss dieser Werthe bei jener Temperatur, für welche die Wärmeleitung des Gases berechnet werden soll.

Da sich die specifische Wärme der Gase bei constantem Volumen nur indirect bestimmen lässt, kann man auch die Aenderung derselben mit der Temperatur nur auf einem indirecten Wege erfahren. Einen dieser Wege habe ich dadurch betreten, dass ich festzustellen suchte, in welcher Weise sich die Abweichung der Gase vom Boyle'schen Gesetze mit der Temperatur ändert.¹⁾ Einen andern Weg, um zu den gleichen Ziele zu gelangen, hat Wüllner²⁾ verfolgt, indem er das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen bei verschiedenen Temperaturen (0° und 100°) bestimmte. In beiden Fällen hat man mit dem gewonnenen Resultate die Werthe

1) Winkelmann, Wied. Ann. 5. p. 92. 1878.

2) Wüllner, Wied. Ann. 4. p. 321. 1878.

bei constantem Drucke zu combiniren, um die Aenderung der specifischen Wärme bei constantem Volumen mit wachsender Temperatur zu erfahren.

Aus der Zusammenstellung, welche Wüllner am Schlusse seiner Arbeit für die beobachteten und berechneten Werthe der Wärmeleitung macht, zieht derselbe den Schluss, dass bei den mehratomigen Gasen (mehr als 2atomig) zwischen Beobachtung und Berechnung eine vortreffliche Uebereinstimmung bestehe. Bei den zweiatomigen Gasen (es werden Luft und Kohlenoxyd angeführt) ist indess die fragliche Uebereinstimmung nicht mehr vorhanden. Zwar bemerkt Wüllner, dass der Werth für die Wärmeleitung der Luft, der sich mit Hülfe des durch O. E. Meyer bestimmten Reibungscoëfficienten berechnet, sehr nahe mit dem von Kundt und Warburg experimentell gefundenen Werthe der Wärmeleitung übereinstimmt. Bedenkt man aber, dass Kundt und Warburg in Hinsicht der Abweichung ihres Werthes für die Wärmeleitung der Luft von dem durch Stefan erhaltenen Resultate selbst erklären, dass sie dieser Abweichung wegen der Unsicherheit in der Bestimmung des calorimetrischen Werthes ihres Thermometers keine Bedeutung beilegen, so wird man auch der von Wüllner erwähnten Uebereinstimmung eine Bedeutung nicht zusprechen können, und es bleibt dann das Resultat übrig, dass, während die mehratomigen Gase mit den theoretisch berechneten Werthen eine gute Uebereinstimmung zeigen, diese bei den zweiatomigen fehlt. Es ist dies insofern eigenthümlich, als die mehratomigen Gase ein viel ungleichmässigeres Verhalten gegenüber anderen physikalischen Eigenschaften zeigen, als die zweiatomigen Gase dies thun, und darum hätte man eigentlich das umgekehrte Resultat erwarten sollen, nämlich dieses, dass die grösste Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung bei den zweiatomigen Gasen vorhanden sei. In einer Hinsicht ist dieses nun auch in der That der Fall; betrachtet man die Temperaturcoëfficienten oder das Verhältniss der Wärmeleitung bei 100° zu jener bei 0° , so findet fast vollständige Uebereinstimmung bei Luft statt, während die anderen Gase mehr

oder weniger grosse Abweichungen zeigen, wie die folgende Tabelle von Wüllner zeigt.

	k_{100} k_0	
	beobachtet	berechnet
Luft	1,2747	1,2770
Kohlensäure	1,5106	1,5300
Stickoxydul	1,5413	1,4468
Aethylen	1,7668	1,6110

Berechnet man ferner die relative Wärmeleitung bezogen auf Luft als Einheit, so zeigen wieder die zweiatomigen Gase eine nahe Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung¹⁾; dagegen haben die mehratomigen Gase bei allen Beobachtern kleinere Werthe geliefert, als die theoretische Berechnung sie ergab.²⁾

Aus diesem Grunde ist von Stefan, Boltzmann und O. E. Meyer die Annahme gemacht, dass die beiden Arten von Energie, die Atom- und Molecularenergie, um deren Uebertragung es sich bei der Wärmeleitung handelt, in verschiedener Stärke zur Geltung kommen. Während aber Boltzmann die oben ausgesprochene Annahme für alle Gase eintreten lässt, beschränkt Meyer dieselbe auf jene Gase, welche mehr als zwei Gase in dem Molecül enthalten, sodass letzterer zwei verschiedene Formeln zur Berechnung der Wärmeleitung anwendet.

Es schien hier nun für die vorliegende Frage wünschenswerth, einen Punkt noch näher aufzuklären, welcher auch dazu beitragen konnte, eine Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung hervorzubringen, auf welchen, so viel ich weiss, die Aufmerksamkeit bisher nicht gelenkt wurde. Nach der Theorie ist die Wärmeleitung der Gase unabhängig vom Drucke, und ist diese Forderung für Luft innerhalb weiter Grenzen bestätigt. Für andere Gase ist die Unabhängigkeit der Wärmeleitung vom Drucke nicht experimentell nachgewiesen, und es ist daher für jene Gase, welche vom Boyle-

1) Mit Ausnahme von Wasserstoff.

2) Siehe die Zusammenstellung von O. E. Meyer, p. 194, wo die Werthe von Stefan, Plank, Kundt und Warburg und mir angegeben sind.

schen Gesetze abweichen, jedenfalls noch zweifelhaft, ob sie dem gedachten Gesetze genügen.

Was ferner die Aenderung der Wärmeleitung mit der Temperatur angeht, so ist dieselbe von Wüllner für den Druck von 1 Atmosphäre berechnet, indem die Versuche zur Bestimmung des Verhältnisses der specifischen Wärme bei diesem Drucke ausgeführt wurden. Die von mir beobachteten Werthe, welche in der mitgetheilten Zusammenstellung von Wüllner zur Vergleichung aufgeführt sind, wurden aber bei sehr kleinen Drucken erhalten; bei Luft und Kohlensäure war der Druck nicht grösser als 100 mm, während er bei den andern Gasen Stickoxydul und Aethylen nur 5 mm erreichte.

Ich habe daher die Wärmeleitung desselben Gases bei dem Drucke einer Atmosphäre mit jener bei dem Drucke von 10 mm verglichen und ebenso die Aenderung der Wärmeleitung mit wachsender Temperatur für diese beiden Drucke untersucht. Als Resultat dieser Untersuchung hat sich ergeben, dass die Wärmeleitung eines Gases, welches vom Boyle'schen Gesetze abweicht, nicht ganz unabhängig vom Drucke ist, sondern vielmehr mit wachsendem Drucke in geringem Masse abnimmt. Am Schlusse der Arbeit habe ich eine Erklärung dieser Erscheinung aus der Theorie der Gase zu geben versucht.

§ 1.

Da der Vorgang der Wärmeleitung durch Strömungen, welche infolge von Dichtigkeitsunterschieden eintreten, im allgemeinen modificirt wird, kam es zunächst darauf an, diese Strömungen für die vorliegenden Versuche auszuschliessen. Zu diesem Zwecke habe ich einen Glasapparat von derselben Form angewandt, wie solche schon früher bei der Untersuchung der Abhängigkeit der Wärmeleitung von der Temperatur von mir benutzt wurden. Wie sich aus den früheren Versuchen ergibt, werden die Strömungen um so schwächer, je dünner die Gasschicht ist, durch welche die Wärmeleitung vor sich geht¹⁾; so wurde für einen Apparat, bei dem die Dicke der Gasschicht 0,318 cm betrug, angegeben, dass die Abkühlungs-

1) Winkelmann, Pogg. Ann. 156. p. 513. 1875 u. 157 p. 510. 1876.

geschwindigkeit der Luft bei Atmosphärendruck 0,000 438 0, bei dem Drucke von 2 mm dagegen 0,000 432 8 beträgt. Da nach diesen Werthen der Antheil, welchen die Strömung an der Abkühlung besitzt, weniger als 2 Proc. beträgt, so liess sich erwarten, dass bei einer noch kleineren Schichtdecke die Strömung bis auf ein Minimum reducirbar ist.

Der von mir jetzt benutzte Apparat, in seinen Dimensionen nicht genau gemessen, hatte eine Schichtdicke von etwa 0,15 cm, die Kugel des Thermometers hatte einen Radius von etwa 2 cm.

Es folgen zunächst die Versuche mit Luft, um zu zeigen, dass der Druck hier keinen merklichen Einfluss auf die Wärmeleitung ausübt.

Die bei den einzelnen Temperaturen unmittelbar beobachteten Zeiten sind in Secunden angegeben, und ist am Schlusse jeder Beobachtungsreihe die Summe der beobachteten Zeiten mitgetheilt.

Luft. Druck 10 mm.

A. Abkühlung in schmelzendem Eise.

Temp.	Nr. des Versuchs Zeiten								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
19,13°	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18,13	31	31	31	31	31	31	31	31,5	31
17,13	64	64	64	65	64,5	64,5	64	64,5	64,5
16,13	98,5	99	99	100	99,5	99,5	99	99,5	99,5
15,13	137	136,5	137	137	137,5	137	137	137,5	137
14,13	177	177	177	177	177,5	177	178	178	178
13,13	220	219,5	220	220	220,5	220	221	220	220
12,13	266,5	266,5	267	267	266	266,5	268	267	267
11,13	317	317	317,5	317	318	317	318	318	318
10,13	372,5	372,5	373	371,5	373	371,5	373	373	372
Summa	1683,5	1683,0	1685,5	1684,5	1688,5	1684,0	1689	1689	1687

B. Abkühlung in siedendem Wasser. Temp. 98,79°.

Temp.	Nr. des Versuchs Zeiten		Temp.	Nr. des Versuchs Zeiten	
	13	14		13	14
119,73°	0	0	114,73°	105	104,5
118,73	19	18,5	113,73	130	130
117,73	38	38	112,73	157	156,5
116,73	59	58,5	111,73	186,5	186
115,73	82	81,5	110,73	217,5	217,0
			Summa	994,0	990,5

Druck.¹⁾ 740 mm.A. Abkühlung in schmelzendem
Eise.

Temp.	Nr. des Versuchs Zeiten		
	10	11	12
19,13	0	0	0
18,13	31	31	31
17,13	64,5	64	64
16,13	99,5	99	99,5
15,13	137,5	137	137
14,13	178	177,5	177,5
13,13	220,5	220	220,5
12,13	267	266,5	267
11,13	317,5	317,5	318
10,13	372,5	372	373
Summa	1688,0	1684,5	1687,5

B. Abkühlung in siedendem Wasser.
Temp. 98,73°.

Temp.	Nr. des Versuchs Zeiten	
	15	16
119,73	0	0
118,73	18	18,5
117,73	37,5	38,5
116,73	58,5	58,5
115,73	80,5	81
114,73	104,5	105
113,73	130	130,5
112,73	157	157,5
111,73	186	186
110,73	217,5	218
Summa	989,5	993,5

§ 2.

Wie die vorstehenden Mittheilungen zeigen, sind die Werthe, welche sich auf den geringeren Druck (10 mm) beziehen, fast vollständig jenen Werthen gleich, welche dem höheren Drucke (740 mm) zukommen. Vergleicht man nämlich die Versuche Nr. 1 bis 9 mit den Versuchen Nr. 10 bis 12, so ist der Unterschied sehr unbedeutend, wie sich schon daraus ergibt, dass die Summen der Zeiten, welche am Schlusse eines jeden Versuchs mitgetheilt sind, sich nur um Bruchtheile von 1 Procent unterscheiden. Hierin liegt der Beweis, dass bei dem benutzten Apparate auch bei dem Drucke von einer Atmosphäre Strömungen sich nicht merklich geltend machen, wenn die Wärmeleitung der Luft zwischen den Temperaturgrenzen 0° und 20° untersucht wurde.

Für die höhere Temperatur innerhalb 100° bis 120° folgt das gleiche Resultat aus den Versuchen 13 und 14 einerseits und den Versuchen 15 und 16 andererseits. Da die Temperatur der Hülle bei den Versuchen in siedendem Wasser nicht immer die gleiche ist, so sind auch die Werthe der beobachteten Abkühlungszeiten nicht vollkommen ver-

1) Den Druck von 740 mm hatte das Gas bei der Temperatur von 120°. Bei dieser Temperatur wurde der Apparat an der Quecksilberluftpumpe unter dem genannten Drucke gefüllt.

gleichbar.¹⁾ Um vollkommen vergleichbare Werthe zu erhalten, ist es nothwendig, die Abkühlungsgeschwindigkeit v nach der Formel:

$$v = \log \left\{ \frac{r_0 - \vartheta}{r_1 - \vartheta} \right\} \frac{1}{\log e} \cdot \frac{t}{t_1}$$

zu berechnen, in welcher:

ϑ die constante Temperatur der Hülle,

r_0 die Temperatur des Thermometers zur Zeit 0,

r_1 " " " " " " t_1

bezeichnet.

Wie in meiner früheren Arbeit bemerkt wurde, nehmen die nach obiger Formel berechneten Werthe der Abkühlungsgeschwindigkeit v in derselben Beobachtungsweise mit abnehmender Temperatur meistens stetig ab, weil das Wärmeleitungsvermögen und die Strahlung selbst mit der Temperatur abnehmen. Es wurde nun früher der Mittelwerth sämmtlicher Werthe von v bestimmt und gezeigt, für welche Temperatur der so berechnete Mittelwerth gilt. Dieser endgültige Werth gibt, wie im Folgenden gezeigt werden soll, die Beobachtungen nicht mit der grössten Genauigkeit wieder, welche dieselben erreichen lassen.

Der Werth von v hängt von der beobachteten Abkühlungszeit t_1 ab, ein Fehler in dieser Zeitbestimmung wird einen um so grössern Einfluss auf v ausüben, je kleiner die Zeit ist. Nimmt man daher das arithmetische Mittel aus den Werthen v , so haben die Fehler, welche bei den kleinen Abkühlungszeiten gemacht wurden, einen viel grössern Einfluss auf das Endresultat, als jene Fehler, welche bei Beobachtung der grössern Zeiten begangen sind. Um von diesem Uebelstande den endgültigen Werth zu befreien und ihn dadurch genauer zu machen, muss man jedem Werthe von v ein bestimmtes Gewicht beilegen, welches proportional der für ihn beobachteten Abkühlungszeit t ist, und diesen Gewichten entsprechend den Mittelwerth bilden.

Bezeichnet man mit:

1) Bei dem später untersuchten Aethylen ist die Differenz der Temperaturen grösser, als es bei Luft der Fall war.

r_0 die Temperatur des Thermometers zur Zeit 0

r_1 " " " " " " t_1
 \vdots
 r_n " " " " " " t_n

und mit ϑ die constante Temperatur der Hülle, so ist:

$$v_1 = \log \left\{ \frac{r_0 - \vartheta}{r_1 - \vartheta} \right\} \cdot \frac{1}{\log e} \cdot \frac{1}{t_1}$$

$$\vdots$$

$$v_n = \log \left\{ \frac{r_0 - \vartheta}{r_n - \vartheta} \right\} \cdot \frac{1}{\log e} \cdot \frac{1}{t_n}$$

Der Mittelwerth V , nach den obigen Bemerkungen berechnet, ist dann:

$$(I) \quad V = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + \dots + v_n t_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n},$$

während der früher berechnete Mittelwerth ohne Rücksicht auf die verschiedenen Gewichte:

$$\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n} \text{ war.}$$

Um nach Gleichung (I) den Werth V zu berechnen, ist es nicht nothwendig, die einzelnen Werthe $v_1 \dots v_2$ zu bestimmen, sondern man hat einfacher:

$$(II) \quad V = \frac{n \cdot \log(r_0 - \vartheta) - \{\log(r_1 - \vartheta) + \log(r_2 - \vartheta) + \dots + \log(r_n - \vartheta)\}}{t_1 + t_2 + \dots + t_n} \cdot \frac{1}{\log e}.$$

Es bleibt nun noch die Frage zu beantworten, auf welche Temperatur sich dieser Werth V bezieht.

In meiner früheren Arbeit¹⁾ habe ich gezeigt, dass sich der Werth v_1 bezieht auf die Temperatur²⁾:

$$\vartheta_{1,p} = \frac{r_0 + r_1 + 2\vartheta}{4}.$$

Bezeichnet man die Temperatur, auf welche sich der Werth v_n bezieht, mit $\vartheta_{0,n}$, so hat man:

$$\vartheta_{0,n} = \frac{r_0 + r_n + 2\vartheta}{4}.$$

Der Werth V bezieht sich daher auf eine Temperatur T , welche nach der Gleichung:

$$T = \frac{\vartheta_{0,1} \cdot t_1 + \vartheta_{0,2} \cdot t_2 + \dots + \vartheta_{0,n} \cdot t_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}$$

1) L. c. p. 514.

2) Nur war damals die Temperatur ϑ gleich 0 gesetzt.
 Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XI.

zu bestimmen ist, oder:

$$T = \frac{r_0 + 2\vartheta}{4} + \frac{r_1 \cdot t_1 + r_2 \cdot t_2 + \dots + r_n \cdot t_n}{4(t_1 + t_2 + \dots + t_n)}.$$

Macht man die Annahme, welche bei den Versuchen erfüllt ist, dass:

$$r_1 = r_0 - 1$$

$$r_2 = r_0 - 2$$

$$r_n = r_0 - n,$$

so hat man:

$$(III) \quad T = \frac{r_0 + \vartheta}{2} - \frac{t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \dots + nt_n}{4(t_1 + t_2 + \dots + t_n)}.$$

Berechnet man nach den Formeln (II) u. (III) die Beobachtungen für Luft, so erhält man folgende Werthe:

Luft.

Nr. des Vers.	10 mm Druck $V \cdot \log e$
1	0,00074333
2	355
3	242
4	288
5	112
6	310
7	090
8	090
9	160

Mittel 0,00074220

mit einer mittleren Abweichung
von 0,000 000 95 = 0,13 Proc.

Temp. 7,93°.

Nr. des Vers.	740 mm Druck $V \cdot \log e$
10	0,00074135
11	288
12	178

Mittel 0,00074200

mit einer mittleren Abweichung
von 0,000 000 58 = 0,08 Proc.

Temp. 7,93°.

Nr. des Vers.	$V \cdot \log e$
13	0,0011257
14	297

Mittel 0,0011277

mit einer mittleren Abweichung
von 0,000 002 0 = 0,2 Proc.

Temp. 107,64°.

Nr. des Vers.	$V \cdot \log e$
15	0,0011268
16	223

Mittel 0,0011245

mit einer mittleren Abweichung
von 0,000 002 3 = 0,2 Proc.

Temp. = 107,61°.

Die beiden Mittelwerthe, welche bei verschiedenen Drucken gefunden sind, unterscheiden sich bei der niedrigen Temperatur um weniger als 0,1 Proc.; bei der höheren Temperatur beträgt die Differenz 0,3 Proc., sodass der kleinere

Druck den grösseren Werth ergeben hat; auch diese Differenz kann man als innerhalb der Beobachtungsfehler liegend betrachten. Der geringe Temperaturunterschied von $0,03^{\circ}$ hat keinen Einfluss auf das Resultat.

Die vorliegenden Versuche beweisen, dass der Apparat den Strömungen keinen messbaren Antheil an der Wärmeleitung gestattet, und dass derselbe daher benutzt werden kann, um den Einfluss des Druckes bei anderen Gasen zu untersuchen.

§ 3. Aethylen.

Das Gas wurde durch Erhitzen von Schwefelsäure und Alkohol entwickelt und durch Schwefelsäure und Kalilauge gewaschen. Dasselbe wurde deshalb zu den folgenden Versuchen gewählt, weil es sich nach meiner früheren Untersuchung durch eine starke Zunahme der Wärmeleitung mit wachsender Temperatur auszeichnete.

Es folgen zunächst die directen Beobachtungen der Abkühlungszeiten, in derselben Weise angeordnet wie früher bei den Versuchen mit Luft. Die Versuche sind so angestellt, dass zuerst in schmelzendem Eise und dann in siedendem Wasser die Abkühlungsgeschwindigkeit bestimmt wurde, und dass schliesslich die Versuche in schmelzendem Eise nochmals wiederholt wurden, um so zu beweisen, dass der Apparat keine Aenderung erlitten hatte.

Aethylen. Druck 10 mm.

A. Abkühlung in schmelzendem Eise.

Temp.	Nr. des Versuchs					
	Zeiten					
	1	2	3	4	5	9
19,49°	0	0	0	0	0	0
18,49	36,5	36,5	36,5	36,5	36,5	36,5
17,49	75	75,5	75	75	75	75,5
16,49	116	116	116	116	116,5	116,5
15,49	160,5	160,5	160,5	160,5	160,5	160,5
14,49	207	207	207	207,5	207	207
13,49	257	257	258	258	257,5	257,5
12,49	312	312	313	312,5	311,5	312,5
11,49	371	371	372	372	370,5	371,5
10,49	435	436	437	437	435	435,5
Summa	1970,0	1971,5	1975,0	1975,0	1970,0	1972,5
	31*					

B. Abkühlung in siedendem Wasser.¹⁾

Temp.	Nr. des Versuchs					
	Zeiten					
	6	7	8	23	24	25
120,09 ^o	0	0	0	0	0	0
119,09	18,5	18,5	18,5	18,5	18	18
118,09	38	38,5	38	38	38	38
117,09	59	59	59	59	58,5	58,5
116,09	81,5	81	81	81,5	81	80,5
115,09	105	104	104,5	105	104	104
114,09	129,5	129	129	129,5	128,5	128,5
113,09	156,5	156	156	156	155	155
112,09	185,5	184,5	185	185	184	184,5
111,09	216	215	215,5	215	214	214,5
Summa	989,5	985,5	986,5	987,5	981,0	982,5

Druck²⁾ 740 mm.

A. Abkühlung in schmelzendem Eise.

Temp.	Nr. des Versuchs			Temp.	Nr. des Versuchs		
	Zeiten				Zeiten		
	10	11	12		10	11	12
19,49 ^o	0	0	0	14,49	208	207,5	208
18,49	36,5	36,5	36,5	13,49	258	258	258,5
17,49	75,5	75,5	75,5	12,49	313,5	313,5	313
16,49	116,5	116,5	117	11,49	373	372,5	372,5
15,49	160	160,5	161,5	10,49	438,5	437,0	437,5
				Summa	1979,5	1977,5	1980,0

B. Abkühlung in siedendem Wasser.³⁾

Temp.	Nr. des Versuchs									
	Zeiten									
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
120,09 ^o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
119,09	19,5	19	19	18,5	18,5	18,5	19,5	19,5	18,5	18,5
118,09	39	39	39	38	38	38	39,5	39,5	38,5	38,5
117,09	60	60	60	59	58,5	59	61	61	59,5	60
116,09	82,5	82,5	82,5	81	81	81	83,5	84	82	82
115,09	106,5	106,5	106	104	103,5	104	108	108	106	106
114,09	132	131,5	131,5	128,5	128,5	129	134	133,5	131,5	131
113,09	159	159	159	155	155,5	155,5	161,5	161,5	159	158,5
112,09	189	189	188,5	184	184	184,5	191,5	191,5	188	188
111,09	220	220	220	214	214,5	214,5	224	223,5	220	219,5
Summa	1008,5	1006,5	1005,5	982,0	982,0	984,0	1022,5	1022,0	1003,0	1002,0

1) Bei den Versuchen Nr. 6, 7, 8 war die Temperatur des siedenden Wasser 98,64°; bei den folgenden Versuchen 98,52.

2) Siehe die Bemerkung bei Luft.

3) Bei den Versuchen Nr. 13, 14, 15 war die Temperatur des siedenden Wassers gleich 98,80°; bei Nr. 16, 17, 18 gleich 98,43°; bei Nr. 19, 20 gleich 98,98°; bei Nr. 21, 22 gleich 98,82°.

Berechnet man in gleicher Weise, wie bei Luft, den Mittelwerth der Abkühlungsgeschwindigkeiten und der Temperaturen, für welche die Versuche gelten, so erhält man folgende Resultate.

Aethylen.

10 mm Druck.

Nr. des Vers.	$V. \log e$
1	0,000 620 57
2	20 10
3	19 00
4	19 00
5	20 57
9	19 78

Mittel 0,000 619 84

mit einer mittleren Abweichung von
0,000 000 58 = 0,09 Proc.

Temp. $8,10^\circ$.

740 mm Druck.

Nr. des Vers.	$V. \log e$
10	0,000 617 59
11	8 22
12	7 46

Mittel 0,000 617 76

mit einer mittleren Abweichung von
0,000 000 31 = 0,05 Proc.

Temp. $8,10^\circ$.

Nr. d. Vers.	$V. \log e$	Temp. des sied. Wassers
6	0,001 097 1	98,64°
7	102 4	
8	101 4	
22	093 0	98,52
24	100 2	
25	198 6	

Mittel 0,001 098 8

mit einer mittleren Abweichung von
0,000 002 5 = 0,2 Proc.

Temp. $107,69^\circ$.

Nr. d. Vers.	$V. \log e$	Temp. des sied. Wassers
13	0,001 087 4	98,80°
14	89 6	
15	90 6	
16	93 4	98,43
17	93 4	
18	91 2	
19	84 5	98,98
20	85 1	
21	94 4	
22	95 5	98,82

Mittel 0,001 090 5

mit einer mittleren Abweichung von
0,000 003 1 = 0,3 Proc.

Temp. $107,78^\circ$.

Uebersieht man die obigen Werthe, so erkennt man, dass die Versuche in schmelzendem Eise eine grössere Uebereinstimmung unter einander zeigen, als jene, welche in siedendem Wasser ausgeführt wurden, denn während die ersten eine mittlere Abweichung von 0,1 Proc. zeigen, geht bei den letztern diese bis zu 0,3 Proc. Eine nähere Betrachtung der letzteren Werthe lässt aber weiter erkennen, dass die Versuchsgruppen, welche bei gleicher Temperatur des siedenden Wassers angestellt wurden, meistens eine gute Uebereinstimmung zeigen. Ich halte es daher für wahrscheinlich,

dass die grösseren Differenzen, welche sich in den Versuchen bei der höhern Temperatur vorfinden, von einer Unsicherheit in der Bestimmung der Temperatur des siedenden Wassers herrühren. Ein Fehler von $0,1^\circ$ in der Temperatur des siedenden Wassers hat einen Fehler von 0,7 Proc. in der Abkühlungsgeschwindigkeit zur Folge. Da es nicht erlaubt ist, die Temperatur des siedenden Wassers jener der siedenden Dämpfe gleich zu setzen, so kann man die erstere auch nicht aus dem Barometerstand berechnen, sondern hat sie durch ein Thermometer zu bestimmen. Die Angaben des Thermometers in siedendem Wasser sind aber nicht völlig constant, vielmehr treten Schwankungen bis zu $0,1^\circ$ vielfach ein, sodass der mittlere Werth der Temperaturbestimmung eine Unsicherheit von $0,05^\circ$ sehr leicht erfährt. Ich glaube, dass hierdurch die grössere Genauigkeit der Versuche in schmelzendem Eise genügend erklärt ist.

Eine Vergleichung der Werthe bei hohem und niedrigem Drucke zeigt, dass bei beiden Temperaturen die Abkühlungsgeschwindigkeit grösser war, wenn das Gas unter niedrigem Drucke stand. Bei der Temperatur $8,10^\circ$ beträgt der Unterschied 0,33 Proc., bei der höheren Temperatur aber 0,76 Proc. Bei dieser letzten Temperatur sind die Werthe nicht vollkommen vergleichbar, weil die Temperaturen für die verschiedenen Drucke nicht ganz gleich sind. Um die Werthe auf diese Temperatur zu reduciren, ist die Annahme gestattet, dass die Abkühlungsgeschwindigkeit sich proportional der Temperatur ändert; man erhält alsdann statt des Werthes 0,0010905 für die Temperatur $107,78^\circ$, den Werth 0,0010901 bezogen auf die Temperatur $107,69^\circ$. Das Resultat der Versuche ist daher folgendes:

V. log e für Aethylen.

Temperatur	10 mm Druck	740 mm Druck	Differenz in Proc.
$8,10^\circ$	0,000 619 84	0,000 617 76	0,33
107,69	0,001 098 8	0,001 090 1	0,80

Jedenfalls geht aus diesen Werthen hervor, dass der Einfluss, welchen der Druck auf die Wärmeleitung des Aethylens ausübt, ein sehr geringer ist. Hieraus folgt dann weiter, dass die Unterschiede zwischen Theorie und

Erfahrung, welche früher erwähnt wurden, nicht ihre Begründung darin finden können, dass die Beobachtungen, welche bei der Berechnung combinirt sind, verschiedenen Drucken der Gase entsprechen.

§ 4.

Man könnte glauben, dass die beobachteten Unterschiede in der Wärmeleitung, wie sie sich aus der letzten Zusammenstellung von $V. \log . e$ ergeben, von Beobachtungsfehlern herühren. Ich halte es indessen für wahrscheinlicher, dass die beobachteten Differenzen wenigstens dem Sinne nach wirklich vorhanden sind. Das Resultat der Versuche, nach welchem das Gas unter niedrigem Drucke besser die Wärme leitet, als unter erhöhtem Drucke, hatte ich nicht erwartet, vielmehr glaubte ich anfangs, dass, wenn überhaupt eine Differenz sich finden sollte, dieselbe das Gegentheil zeigen würde. Ich habe daher die ersten Versuche mit Misstrauen aufgenommen und dieselben mehrfach wiederholt, indem ich den Apparat entleerte und von neuem füllte. Es haben indessen diese Beobachtungen das erste Resultat durchweg bestätigt, und da die fragliche Differenz entschieden grösser als der mittlere Fehler der Beobachtungen ist, so glaube ich mit besonderer Rücksicht auf die Versuche in schmelzendem Eise, den Beobachtungsfehlern die Differenz nicht zuschreiben zu dürfen.

Eine Erklärung der vorliegenden Erscheinung, dass die Wärmeleitung mit wachsendem Drucke abnimmt, lässt sich in doppelter Weise versuchen.

Erstens kann man annehmen, dass die specifische Wärme des Aethylens bei constantem Volumen nicht unabhängig vom Drucke ist, dass dieselbe vielmehr mit wachsendem Drucke abnimmt. Diese Annahme steht mit den Untersuchungen Regnault's, nach welchem die specifische Wärme der Gase als unabhängig vom Drucke beobachtet wird, nicht in Widerspruch. Wie Schröder van der Kolk¹⁾ gezeigt hat, wächst die Differenz der specifischen Wärme bei constantem Druck und bei constantem Volumen ($c_p - c_v$) mit wachsendem Drucke

1) Schröder van der Kolk, Pogg. Ann. 126. p. 353. 1865.

für die von ihm untersuchten Gase Wasserstoff, Luft und Kohlensäure. Wenn man daher nach Regnault's Untersuchungen annimmt, dass die specifische Wärme bei constantem Druck unabhängig vom Drucke ist, so muss die specifische Wärme bei constantem Volumen mit wachsendem Drucke abnehmen. Indessen hat die Untersuchung Regnault's die Frage, ob die specifische Wärme der Kohlensäure (mit diesem Gase ist das oben untersuchte Aethylen wohl am ersten vergleichbar) unabhängig vom Drucke sei, nicht endgültig entschieden, vielmehr erkennt Regnault selbst an, dass die Möglichkeit einer Aenderung nicht ausgeschlossen sei. Daher ist denn auch die Annahme, dass die spec. Wärme bei constantem Volumen mit wachsendem Drucke abnehme, durch die Regnault'schen Bestimmungen nicht erwiesen, wenn sie auch mit denselben, wie schon erwähnt, übereinstimmt.

Zweitens kann man (und diese Erklärung ist der ersteren vorzuziehen) die Abweichung des Aethylens vom Boyle'schen Gesetze zu Erklärung der fraglichen Erscheinung verwerthen. Aus dieser Abweichung, nach welcher die Compression des Gases bei wachsendem Drucke stärker ist, als sie nach dem Boyle'schen Gesetze sein sollte, geht hervor, dass zwischen den Molecülen Cohäsionskräfte thätig sind. Den Einfluss dieser Cohäsionskräfte kann man so ansehen, dass durch denselben bei jedem Zusammenstoss zweier Molecüle eine zeitliche Verzögerung der geradlinigen Bewegungen eintritt.¹⁾ Je grösser nun die Zahl der Zusammenstösse in der Zeiteinheit ist, um so häufiger wird auch die genannte Verzögerung eintreten. Diese Verzögerung wird daher mit wachsender Stosszahl, oder dem entsprechend mit wachsender Dichte des Gases, einen zunehmenden Einfluss auf die Geschwindigkeit erlangen, mit der zwei sich begrenzende Gasschichten von verschiedener Temperatur die Energie ihrer Bewegungen austauschen. Hiernach ist die Erscheinung, dass die Wärmeleitung eines Gases, bei welchem Cohäsionskräfte thätig sind, mit wachsen-

1) Recknagel, Pogg. Ann. Ergbd. 5. p. 565. 1871. O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, p. 66.

dem Drucke abnimmt, nicht mehr auffallend, sondern ganz verständlich. Es müsste dann diese Abnahme um so grösser sein, je grösser die Cohäsionskräfte sind. Die letzteren nehmen mit wachsender Temperatur ab, und daher müsste der Einfluss einer gleichen Druckänderung bei hoher Temperatur kleiner, als bei niedriger Temperatur sein. Da meine Versuche bei der tiefen Temperatur auch einem kleinern Drucke entsprechen (statt 740 mm etwa 540 mm), so lassen dieselben diese Consequenz nicht unmittelbar erproben; es ist aber auch zweifelhaft, ob die Genauigkeit hierfür ausreichen würde.

Hohenheim, Juli 1880.

**IX. Strömungen von Flüssigkeiten
infolge ungleicher Temperatur innerhalb derselben;
von A. Oberbeck.**

1. In einer vor kurzem in diesen Annalen veröffentlichten Abhandlung¹⁾ habe ich gezeigt, dass unter gewissen, besonders einfachen Umständen die stationären Strömungen von Flüssigkeiten infolge innerer Temperaturdifferenzen sich berechnen lassen, und dass sich angeben lässt, in welcher Weise die Wärmeverbreitung in der Flüssigkeit dadurch verändert wird. Die hierbei in Betracht kommenden Grössen: Temperatur, Druck und Stromcomponenten lassen sich in einzelnen Fällen in Reihen entwickeln, deren Convergenz allerdings jedesmal besonders zu untersuchen ist. Ich habe schon damals darauf hingewiesen, dass man auf eine schnelle Convergenz derselben rechnen darf, wenn die ursprüngliche Temperaturvertheilung in der Flüssigkeit nur sehr wenig von derjenigen abweicht, bei welcher stabiles Gleichgewicht besteht. In diesem Fall ist es immer möglich, die ersten Glieder in der Reihe der Stromcomponenten und des Druckes zu berechnen, wenn die Temperaturvertheilung in der Flüssigkeit gegeben ist. Wenigstens kann man stets ein System

1) Oberbeck, Wied. Ann. 7. p. 271—292. 1879.

particulärer Lösungen angeben, welches den gegebenen Differentialgleichungen genügt. Um auch die Grenzbedingungen zu erfüllen, hat man dann noch weitere Glieder hinzuzufügen. Letztere lassen sich natürlich nicht allgemein angeben, da sie von der Gestalt der Grenzflächen wesentlich abhängen. Nach Aufstellung jener allgemeinen Lösungen habe ich die Rechnung an einem Beispiel durchgeführt, bei welchem angenommen ist, dass die in einer Hohlkugel eingeschlossene Flüssigkeit von aussen erwärmt wird, dass bereits ein stationärer Zustand eingetreten ist, und dass die Temperaturvertheilung in der Flüssigkeit nur wenig abweicht von einer gleichmässigen Abnahme von unten nach oben.

2. Für die ersten Glieder in den Reihen für den Druck und die Stromcomponenten gelten die folgenden Differentialgleichungen, welche den Nummern (11a), (12a), (13a), (14a) der oben citirten, früheren Abhandlung entsprechen, wobei hier die dort stehenden Indices fortgelassen werden konnten, da es sich jetzt nur um die Berechnung der ersten Glieder handeln soll:

$$(1) \quad \Delta \vartheta = 0,$$

$$(2) \quad \Delta u = \frac{dp}{dx}, \quad \Delta v = \frac{dp}{dy}, \quad \Delta w = \frac{dp}{dz} - \beta \vartheta^1),$$

$$(3) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Hier bedeuten, wie früher, ϑ die Temperatur, p den Druck, u, v, w die Stromcomponenten nach den drei Axen eines Punktes, x, y, z der Flüssigkeit, während:

$$\beta = \frac{\varrho_0 G}{\mu},$$

wo ϱ_0 die Dichtigkeit bei 0° , μ den Reibungscoefficienten der Flüssigkeit, G die Constante der Schwere repräsentiren.

Zu diesen Gleichungen kommen noch die Bedingungen, dass an den festen Wänden der Flüssigkeit ϑ gegebene, unveränderliche Werthe hat, während u, v, w an denselben verschwinden müssen, da die Flüssigkeit als haftend vorausgesetzt wird.

1) In der Gl. (12a) der früheren Abhandlung steht infolge eines Druckfehlers $+\beta\vartheta$.

In dem gegebenen Gleichungssystem kann zunächst ϑ durch die Gleichung (1) und die Grenzbedingungen nach bekannten Methoden berechnet werden, sodass wir diese Function als eine gegebene ansehen. Um sodann u, v, w zu bestimmen, kann man annehmen, dass dieselben sich in folgender Weise darstellen lassen:

$$(4) \quad u = \frac{d^2 f}{dx \cdot dz}, \quad v = \frac{d^2 f}{dy \cdot dz}, \quad w = \frac{d^2 f}{dz^2} + F;$$

wo f und F noch weiter zu bestimmende Functionen sind. Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (2) ein, so erhält man:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} \left\{ \Delta \frac{df}{dz} \right\} = \frac{dp}{dx}, & \frac{d}{dy} \left\{ \Delta \frac{df}{dz} \right\} = \frac{dp}{dy}, \\ \frac{d}{dz} \left\{ \Delta \frac{df}{dz} \right\} + \Delta F = \frac{dp}{dz} - \beta \cdot \vartheta. \end{cases}$$

Man kann dieselben befriedigen, indem man setzt:

$$(6) \quad \Delta \left(\frac{df}{dz} \right) = p + \text{Const.}$$

$$(7) \quad \Delta F = -\beta \cdot \vartheta.$$

Gleichung (3) endlich erfordert, dass:

$$(8) \quad \frac{d}{dz} \left\{ \Delta f + F \right\} = 0.$$

In vielen Fällen genügt es, zu setzen:

$$(9) \quad \Delta f = -F.$$

Aus Gleichung (7) kann man zunächst F durch ϑ , ferner nach (9) f durch F berechnen.

Bezeichnet man mit F_1 eine Function, für welche:

$$\Delta F_1 = -\beta \cdot \vartheta,$$

mit F_2 eine solche, für welche:

$$\Delta F_2 = 0,$$

bezeichnet man ferner mit f_1, f_2, f_3 Functionen, für welche:

$$\Delta f_1 = -F_1, \quad \Delta f_2 = -F_2, \quad \Delta f_3 = 0,$$

so sind:

$$(10) \quad F = F_1 + F_2, \quad f = f_1 + f_2 + f_3$$

die gesuchten Functionen.

Die in den Gleichungen (4), (7), (9), (10) enthaltenen Lösungen können immer noch particulär sein, und ist es

gestattet, weitere resp. Werthe: u' , v' , w' hinzuzuaddiren, welche den Gleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta u' = \frac{dp'}{dx}, & \Delta v' = \frac{dp'}{dy}, & \Delta w' = \frac{dp'}{dz}, \\ \frac{du'}{dx} + \frac{dv'}{dy} + \frac{dw'}{dz} = 0, & \Delta p' = 0 \end{cases}$$

genügen.

3. Um die Anwendbarkeit der allgemeinen Lösungen zu zeigen, habe ich die Rechnung für das folgende Beispiel durchgeführt. Eine Hohlkugel vom Radius R sei vollständig mit Flüssigkeit erfüllt. Dieselbe werde von aussen her so lange erwärmt, bis sich eine stationäre Temperaturvertheilung hergestellt hat. Doch soll dieselbe nur wenig abweichen von einer solchen Vertheilung, bei welcher die Flüssigkeit im stabilen Gleichgewicht bleiben würde, d. h. also die Temperatur im Innern der Kugel soll nur wenig verschieden sein von einem überall constanten oder linear von unten nach oben abnehmenden Werth.

Da die Temperatur der Bedingung:

$$\Delta \vartheta = 0$$

zu genügen hat, so kann man ϑ , nach Einführung von Polarcordinaten, in eine Reihe nach Kugelfunctionen entwickelt denken.

Es sei:

$$x = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \chi, \quad y = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \chi, \quad z = r \cdot \cos \varphi.$$

Der Einfachheit wegen mag vorausgesetzt werden, dass die Temperatur um den verticalen Durchmesser (die z -Axe) herum symmetrisch vertheilt, d. h. dass ϑ von χ unabhängig ist. Dann kann man setzen:

$$\vartheta = \sum h_n \cdot r^n \cdot p_n(\cos \varphi),$$

wo p_n die n te Kugelfunction einer Veränderlichen bedeutet. Auch hier habe ich mich auf die drei ersten Glieder der Reihe beschränkt, sodass ich angenommen habe:

$$\begin{aligned} \vartheta &= k_0 + k_1 r \cdot \cos \varphi + k_2 r^2 (3 \cos^2 \varphi - 1), \\ &= k_0 + k_1 z + k_2 (3z^2 - r^2). \end{aligned}$$

Die Constanten k_0, k_1, k_2 kann man sich passend durch die folgenden Bedingungen bestimmt denken:

$$\left. \begin{array}{l} r = R, \\ \varphi = 0 \end{array} \right\} \vartheta = 2\vartheta_0, \quad r = 0, \quad \vartheta = (1 - \alpha)\vartheta_0,$$

$$\left. \begin{array}{l} r = R, \\ \varphi = 180^\circ \end{array} \right\} \vartheta = 0.,$$

wobei α eine als klein anzusehende Constante bedeutet, welche die Abweichung der Flächen gleicher Temperatur von horizontalen Ebenen bewirkt. Es ist dann:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta = \vartheta_0 \left\{ 1 - \alpha + \frac{r \cos \varphi}{R} + \frac{\alpha}{2} \frac{r^2}{R^2} (3 \cos^2 \varphi - 1) \right\}, \\ \text{oder auch:} \\ \vartheta = \vartheta_0 \left\{ 1 - \alpha + \frac{z}{R} + \frac{\alpha}{2R^2} (2z^2 - x^2 - y^2) \right\}. \end{array} \right.$$

Hat α einen positiven Werth, so nimmt auf dem verticalen Durchmesser die Temperatur anfangs langsamer, später schneller zu, als bei der Vertheilung nach einer linearen Function stattfinden würde. In jeder Horizontalebene hat die Temperatur in der Axe ihren grössten Werth und nimmt nach der Grenzfläche zu ab. Für ein negatives α ergeben sich die umgekehrten Folgerungen für die Temperaturvertheilung.

Die Flächen gleicher Temperaturen sind Rotationshyperboloide, deren gemeinsame Axe die z Axe ist. Ist ϑ constant oder eine lineare Function von z , so entsteht keine Bewegung in der Flüssigkeit. In den Gleichungen (3) und (7) ist daher nur derjenige Theil von ϑ zu benutzen, welcher bei Bildung der Werthe von u, v, w wirklich in Betracht kommt, nämlich:

$$\vartheta_0 \frac{\alpha}{2} \frac{r^2}{R^2} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

Da bei allen weiteren Rechnungen der Factor $\vartheta_0 \frac{\beta \cdot \alpha}{2R^2}$ überall gleichmässig auftritt, so mag derselbe vorläufig fortgelassen werden, und setzen wir daher in den Gleichungen (3) und (7) an Stelle von $\beta \cdot \vartheta$:

$$r^2 (3 \cos^2 \varphi - 1) = 3z^2 - r^2.$$

4. Bei der Auflösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen wurden die hinzuzufügenden, willkürlichen

Functionen nur insoweit hingeschrieben, als sie für das Endresultat in Betracht kommen. Hiernach gibt Gl. (7):

$$\Delta F = -(3z^2 - r^2),$$

die Lösung:

$$(13) \quad F = -\frac{(3z^2 - r^2)}{14} \{r^2 + 14A\};$$

und Gl. (8) die Lösung:

$$(14) \quad f = \frac{3z^2 - r^2}{504} \{r^4 + 36Ar^2 + 504B\},$$

wobei A und B willkürliche Constanten bedeuten.

Das erste particuläre Werthsystem ist daher gemäss Gl. (4):

$$(15) \quad \begin{cases} u = \frac{x \cdot z}{7} \left\{ \frac{z^2}{3} + 2A \right\}, & v = \frac{yz}{7} \left\{ \frac{z^2}{3} + 2A \right\}, \\ w = \frac{1}{4} \left\{ \frac{z^4}{3} + \frac{r^4}{2} - r^2 \cdot z^2 + 2A(4r^2 - 5z^2) + 7B \right\}, \end{cases}$$

wozu der Werth für den Druck gehört:

$$(16) \quad p = \frac{1}{4} \{3z^2 + 2r^2 + 4Az\}.$$

Die weitere Rechnung zeigt, dass hierzu, entsprechend den Gl. (11), noch die Grössen hinzuzufügen sind:

$$(17) \quad \begin{cases} u' = -Cxz \left\{ \frac{r^2}{5} + \frac{z^2}{3} \right\} + 2Dxz, \\ v' = -Cyz \left\{ \frac{r^2}{5} + \frac{z^2}{3} \right\} + 2Dyz, \\ w' = -C \left\{ \frac{z^4}{3} - \frac{4r^2 \cdot z^2}{5} + \frac{r^4}{5} \right\} + D(r^2 - 3z^2), \\ p' = 4C \left\{ z^3 - \frac{3}{2}zr^2 \right\}, \end{cases}$$

wo C und D zwei neue, willkürliche Constanten repräsentiren.

Nimmt man die Summen der Lösungen (15) und (17) und bestimmt die Constanten dadurch, dass:

$$r = R, \quad u = v = w = 0,$$

so erhält man:

$$(18) \quad A = -\frac{R^2}{14}, \quad B = \frac{R^4}{70}, \quad C = \frac{1}{4}, \quad D = \frac{6R^2}{245}.$$

Auf diese Weise ergibt sich:

$$\begin{aligned} u &= \frac{xz}{35} (R^2 - r^2), & v &= \frac{yz}{35} (R^2 - r^2), \\ w &= \frac{z^2}{35} (R^2 - r^2) + \frac{1}{70} \{3r^4 - 4R^2r^2 + R^4\}, \end{aligned}$$

oder auch:

$$w = \frac{z^2}{35} (R^2 - r^2) + \frac{1}{70} (r^2 - R^2) (3r^2 - R^2).$$

Fügt man endlich die zur Vereinfachung fortgelassenen Factoren hinzu und erinnert sich, dass die ersten Glieder der Stromcomponenten auch noch den Factor α (den Ausdehnungscoefficienten der Flüssigkeit) haben, so ist schliesslich:

$$(19) \begin{cases} u = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \vartheta_0}{70 R^2} x z (R^2 - r^2), & v = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \vartheta_0}{70 R^2} y z (R^2 - r^2), \\ w = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \vartheta_0}{70 R^2} (R^2 - r^2) \left\{ z^2 + \frac{1}{2} (R^2 - 3r^2) \right\}. \end{cases}$$

Hierdurch ist diejenige Strömung der Flüssigkeit ausgedrückt, welche eine Folge der stationären Temperaturvertheilung gemäss Gl. (12) ist. Die Bewegung ist leicht zu übersehen, und würde es nicht schwer halten, die entsprechenden Stromcurven zu zeichnen. Insbesondere strömt die Flüssigkeit durch die horizontale Mittelebene ($z = 0$) in verticaler Richtung mit der Geschwindigkeit:

$$\frac{\alpha \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \vartheta_0}{140 R^2} (R^2 - 3r^2) (R^2 - r^2).$$

In dem Kreise, dessen Radius:

$$R = r \sqrt{\frac{1}{3}},$$

ruht die Flüssigkeit; innerhalb desselben steigt sie auf, ausserhalb sinkt sie nieder. Man kann daher die Bewegung auch als eine Art von Wirbelbewegung um den beschriebenen Kreis herum auffassen.

Aus diesem einfachen Beispiel ist, wie ich denke, die Art der Anwendung der allgemeinen Lösungen leicht zu ersehen.

Sobald man sich die Flüssigkeit von einer Kugel oder zwei concentrischen Kugelschalen begrenzt denkt, werden sich die Rechnungen stets leicht ausführen lassen. Grössere Schwierigkeiten treten natürlich bei anderer Form der Grenzflächen ein.

Halle a. S., den 1. August 1880.

**X. Theorie der Interferenzerscheinung,
welche senkrecht zur Axe geschliffene dichroitische
Krystallplatten im polarisirten Lichte zeigen;
von E. Ketteler.**

Die Farbenerscheinungen einer senkrecht zur Axe geschliffenen, dichroitischen Krystallplatte sind in jüngster Zeit mehrfach behandelt worden, so von den Herren Bertin, Bertrand, Cornu, Mallard¹⁾ und von Hrn. Lommel.²⁾ Während die erstgenannten Physiker die Entstehung der Büschel entweder auf Interferenz oder Absorption zurückführen, erklärt sie Hr. Lommel als durch das Eintreten der Totalreflexion bedingt. Im Folgenden gebe ich im Anschluss an meine bisherigen Untersuchungen eine strenge Theorie der Erscheinung, beschränke mich indess der Einfachheit wegen auf monochromatisches Licht.

Seien N_1C und N_2C die Projectionen der Schwingungsebenen der beiden als vollkommen durchsichtig vorausgesetzten Nicol'schen Prismen des Polarisationsapparates, und beider Winkel heisse β . Irgend ein von einem oberhalb C gelegenen Punkte P ausgehender Strahl treffe die eingeschaltete Platte in einem Punkte der Linie EC , die mit N_1C einen Winkel ω bilde. Es wird dadurch EC ein sogenannter Hauptschnitt, und die in die Platte eintretenden extraordinären Schwingungen sind der Ebene ECP , die ordinären der darauf senkrechten OCP parallel.

Schreibt man das Schwingungsgesetz des eintretenden noch unzerlegten Lichtes:

$$\varrho = \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

unter ϱ den Ausschlag zur laufenden Zeit t und unter T die Schwingungsdauer verstanden, so entfällt zunächst dem ordinären Strahle die Amplitude $\sin \omega$. Und da sich der Brechung desselben ein Schwächungscoefficient \mathfrak{D}_0 und eine

1) Beibl. 8. p. 793—799. 1879.

2) Lommel, Wied. Ann. 9. p. 109. p. 1880.

Phasenänderung χ_0 zuordnet, so wird der Ausschlag nach dem Eintritt:

$$\rho_0 = \mathfrak{D}_0 \sin \omega \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - \chi_0 \right).$$

Die Grösse desselben nimmt kraft des Extinctionscoefficienten q_0 ab, und wenn der Strahl, nachdem er den auf die Dicke d kommenden Weg w_0 durchlaufen, die Hinterfläche erreicht, so möge ρ_0 herabgesunken sein auf:

$$\rho'_0 = \mathfrak{D}_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q_0 d} \sin \omega \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\nu_0 w_0}{\lambda} \right) - \chi_0 \right],$$

wo ν_0 das entsprechende Brechungsverhältniss bedeutet, und λ die Wellenlänge im Weltäther ist.

Abermals folgt Brechung und mit derselben eine zweite Phasenänderung, nach Ablauf deren sich für den in Betracht kommenden Antheil des austretenden Strahles schreiben lässt:

$$(1) \quad \begin{cases} \rho''_0 = \mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}'_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q_0 d} \sin \omega \sin (\omega - \beta) \times \\ \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\nu_0 w_0 + w'_0}{\lambda} \right) - \chi_0 - \chi'_0 \right], \end{cases}$$

sofern man nämlich auf die Schwingungsebene des zweiten Nicols zu reduciren hat, und zur inneren Wegstrecke w_0 eine äussere w'_0 hinzutritt.

Aehnliches gilt vom durchgehenden extraordinären Strahl. Während indess die senkrecht auf der Einfallsebene stehenden ordinären Schwingungen bei allen Einfallswinkeln linear polarisirt bleiben, ist die in der Einfallsebene vor sich gehende extraordinäre Schwingungsbewegung eine longitudinal elliptische, deren Ellipticität vom Einfallswinkel abhängt. Beim Eintritt in den Krystall sind demnach senkrecht und parallel zum Loth die Schwächungscoefficienten \mathfrak{D}_x , \mathfrak{D}_z und Phasenänderungen χ_x , χ_z zu unterscheiden. Der Extinctionscoefficient heisse q_e und der vom Strahl zurückgelegte innere Weg w_e . Wenn dann infolge der zweiten Brechung die longitudinal elliptischen Schwingungen sich wiederum in lineare zurückverwandeln, so habe man die neuen Schwächungscoefficienten \mathfrak{D}'_x , \mathfrak{D}'_z und Phasenänderungen χ'_x , χ'_z .

Selbstverständlich lässt sich indess dem austretenden Strahle die Reihenfolge von Umwandlungen, die er erfahren, nicht mehr äusserlich ansehen, und so werden die Schwingungen desselben nach dem Gesetze erfolgen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho''_e = \mathfrak{D}_e \mathfrak{D}'_e e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q_e d} \cos \omega \cos (\omega - \beta) \times \\ \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{v_e w_e + w'_e}{\lambda} \right) - \chi_e - \chi'_e \right], \end{array} \right.$$

sofern man ja die innere longitudinal elliptische Bewegung durch eine äquivalente lineare von gleicher Schwingungsarbeit mit den Attributen $\mathfrak{D}_e, \chi_e; \mathfrak{D}'_e, \chi'_e$ ersetzt denken kann. Dieselben stehen übrigens, wie ich früher¹⁾ für isotrope Mittel ausführlich nachgewiesen, in einem einfachen angebbaren Zusammenhang zu den oben erwähnten Grössen $\mathfrak{D}_s, \chi_s; \mathfrak{D}_z, \chi_z \dots$

Sind so beide Strahlen auf gleiche Schwingungsebene zurückgeführt, und nennt man abkürzungsweise ihre resp. Amplituden A_o, A_e und ihre Anomalie Φ , so erhält man die resultirende Intensität mittelst des bekannten Ausdrucks:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} J = A_o^2 + A_e^2 + 2 A_o A_e \cos \Phi \\ = (A_o + A_e)^2 - 4 A_o A_e \sin^2 \frac{1}{2} \Phi. \end{array} \right.$$

Darin bedeuten sonach:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_o = \mathfrak{D}_o \mathfrak{D}'_o e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q_o d} \sin \omega \sin (\omega - \beta) \\ A_e = \mathfrak{D}_e \mathfrak{D}'_e e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q_e d} \cos \omega \cos (\omega - \beta) \end{array} \right. \quad \text{und:}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= [(\chi_e + \chi'_e) - (\chi_o + \chi'_o)] + \frac{2\pi}{\lambda} [(v_e^s w_e^s - v_o w_o) + (w'_e - w'_o)] \\ &= P + \frac{2\pi}{\lambda} G. \end{aligned}$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks lässt sich bezeichnen als der physische, das zweite als der geometrische Phasenunterschied. Und da der letztere sich auf die Strahlrichtung bezieht, so ist der Deutlichkeit wegen den Bezeichnungen v_e und w_e die Marke s angehängt.

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. 100 u. 291. 1878.

Was weiter den Unterschied der Wege (G) betrifft, so heiße e der Einfallswinkel, r_e^s der Brechungswinkel des extraordinären und r_o der des ordinären Strahles. Man erhält alsdann mit Zuhülfeziehung einer einfachen ebenen Figur leicht die folgende Bestimmung:

$$G = d \left[\frac{v_e^s}{\cos r_e^s} - \frac{v_o}{\cos r_o} - \sin e (\tan r_e^s - \tan r_o) \right] \\ = d \left(\frac{v_e^s - \sin e \sin r_e^s}{\cos r_e^s} - \frac{v_o - \sin e \sin r_o}{\cos r_o} \right).$$

Coordiniren wir jetzt den Attributen (v_e^s , r_e^s oder kürzer) v_s , r_s des Strahles die entsprechenden v_n , r_n der Normalen und nennen den Winkel zwischen beiden δ . Als dann bestehen bekanntlich die Beziehungen:

$$(5) \quad \cos \delta = \frac{v_s}{v_n}, \quad v_n = \frac{\sin e}{\sin r_n}, \quad r_s - r_n = \delta.$$

Führt man dieselben in das erste Glied des vorstehenden Ausdrucks ein, so erhält man:

$$\frac{v_s - \sin e \sin r_s}{\cos r_s} = \frac{v_n - \sin e \sin r_n}{\cos r_n} = v_n \cos r_n.$$

Dieselbe Umwandlung gilt offenbar für das zweite Glied, und sonach wird:

$$G = d (v_e^s \cos r_e^s - v_o \cos r_o) \\ = d (p_e - p_o),$$

wenn wir nämlich für beide Wellen zur Abkürzung setzen:

$$(6) \quad p = v \cos r = \sqrt{v^2 - \sin^2 e}.$$

Man hat folglich als die Gesamtanomalie der interferirenden Strahlen:

$$(7) \quad \Phi = [\chi_e + \chi_e'] - (\chi_o + \chi_o') + \frac{2\pi}{\lambda} d (p_e - p_o).$$

Dies vorausgesetzt, wird die entstehende Interferenzfigur durch den Einfallswinkel e als Radius vector und den zugehörigen Polarwinkel ω bestimmt sein, sobald man die Amplituden (\mathfrak{D} \mathfrak{D}'), die Verzögerungen ($\chi + \chi'$), sowie die Coëfficienten p und q als Functionen des Einfallswinkels e und der beiden axialen Characteristiken a_1 , b_1 ; a_2 , b_2 (als

der axialen Hauptrefractions- und Hauptextinctionscoëfficienten für senkrechten Einfall) zu bestimmen vermag.

Es sei nun die in Rede stehende einaxige Platte optisch gegeben durch die Beziehungen ¹⁾:

$$\begin{aligned} a_1^2 - b_1^2 - 1 &= \sum \frac{D_1 \lambda_m^2 (\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}, & 2a_1 b_1 &= \sum \frac{D_1 \lambda_m^2 g \lambda}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}, \\ &= (N_1^2 - 1) \cos A_1, & &= (N_1^2 - 1) \sin A_1, \\ a_2^2 - b_2^2 - 1 &= \sum \frac{D_2 \lambda_m^2 (\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}, & 2a_2 b_2 &= \sum \frac{D_2 \lambda_m^2 g \lambda}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}, \\ &= (N_2^2 - 1) \cos A_2, & &= (N_2^2 - 1) \sin A_2, \end{aligned}$$

und möge dabei der Index 2 auf die mit dem Lothe zusammenfallende Richtung der optischen Axe als Fortpflanzungsrichtung, der Index 1 auf die dazu senkrechte Richtung bezogen werden. D bedeutet die Dispersionsconstante als Maass der Wechselwirkung zwischen Aether- und Körpermaterie, g die Reibungsconstante der letztern, λ_m die charakteristische Wellenlänge des zugehörigen Absorptionsstreifens, und das Summenzeichen bezieht sich auf die Zahl derselben. Ich definire ferner:

$$N^2 - 1 = \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2 b^2}, \quad \tan A = \frac{2ab}{a^2 - b^2 - 1}$$

als die (auf eine einzige Molecularqualität) reducirte brechende Kraft, resp. als den reducirten Phasenunterschied zwischen Körper- und Aethertheilchen. Gelten diese Definitionen bei den Indices 1 und 2 zunächst für die Axenrichtungen, für welche Strahl und Normale zusammenfallen, so sollen für die intermediären Richtungen N_s , A_s ; N_n , A_n unterschieden werden. Für diese hat man:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} N_s^2 &= N_2^2 \cos^2 r_s + N_1^2 \sin^2 r_s, & \frac{1}{N_n^2} &= \frac{\cos^2 r_n}{N_2^2} + \frac{\sin^2 r_n}{N_1^2}, \\ r_s - r_n &= \delta \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{N_2^2 - N_1^2}{N_s^2} \sin r_s \cos r_s = N_n^2 \left(\frac{1}{N_1^2} - \frac{1}{N_2^2} \right) \sin r_n \cos r_n, \\ \operatorname{tg} A_n &= \operatorname{tg} A_s = \frac{2a_2 b_2 \cos^2 r_s + 2a_1 b_1 \sin^2 r_s}{(a_1^2 - b_1^2 - 1) \cos^2 r_s + (a_2^2 - b_2^2 - 1) \sin^2 r_s}. \end{aligned} \right.$$

1) Ketteler, Berl. Monatsber. Nov. 1879. p. 879.

2) Für symmetrisch angeordnete Mittel ist der Phasenunterschied δ von der Orientirung unabhängig.

Von vorstehenden Ausdrücken benutzen wir die für N_n und Δ_n und bilden daraus die weiteren:

$$(9) \quad a_n^2 - b_n^2 - 1 = (N_n^2 - 1) \cos \Delta_n, \quad 2 a_n b_n = (N_n^2 - 1) \sin \Delta_n.$$

Alsdann ist:

$$(10) \quad \begin{cases} 2p_e^2 = a_n^2 - b_n^2 - \sin^2 e + \sqrt{(a_n^2 - b_n^2 - \sin^2 e)^2 + 4 a_n^2 b_n^2} \\ q_e = \frac{a_n b_n}{p_e} = \frac{a_n b_n}{\sqrt{r^2 - \sin^2 e}} \end{cases}$$

und entsprechend:

$$(11) \quad \begin{cases} 2p_o^2 = a_2^2 - b_2^2 - \sin^2 e + \sqrt{(a_2^2 - b_2^2 - \sin^2 e)^2 + 4 a_2^2 b_2^2} \\ q_o = \frac{a_2 b_2}{p_o} = \frac{a_2 b_2}{\sqrt{r_o^2 - \sin^2 e}} \end{cases}$$

Mittelst dieser Werthe von p und q berechnen sich weiter die Schwächungscoefficienten und Verzögerungen¹⁾:

$$(12) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_o \mathfrak{D}_e = \frac{16 \cos^2 e (p_o^2 + q_o^2)}{[(\cos e + p_o)^2 + q_o^2]^2} \\ \operatorname{tg}(\chi_o + \chi'_o) = \frac{[\cos^2 e - (p_o^2 + q_o^2)] \sin(\varepsilon_o + u_o)}{2 \cos e \sqrt{p_o^2 + q_o^2} + [\cos^2 e + (p_o^2 + q_o^2)] \cos(\varepsilon_o + u_o)}, \end{cases}$$

worin gesetzt ist:

$$(13) \quad \varepsilon_o + u_o = \arctg \frac{q_o}{p_o}.$$

Ferner:

$$(14) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_e \mathfrak{D}'_e = \frac{16 \alpha^2 \cos^2 e (p_e^2 + q_e^2) (a_n^2 + b_n^2)^2}{[\alpha^2 (p_e^2 + q_e^2) + 2 \alpha p_e (p_e^2 + q_e^2) \cos e + (a_n^2 + b_n^2)^2 \cos^2 e]^2}, \\ \operatorname{tg}(\chi_e + \chi'_e) = \frac{[\alpha^2 (p_e^2 + q_e^2) - (a_n^2 + b_n^2)^2 \cos^2 e] \sin(\varepsilon_e - u_e)}{2 \alpha \cos e \sqrt{p_e^2 + q_e^2} (a_n^2 + b_n^2) + [\alpha^2 (p_e^2 + q_e^2) + (a_n^2 + b_n^2)^2 \cos^2 e] \cos(\varepsilon_e - u_e)}, \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \text{wo:} & \alpha = 1 - \frac{\sin e \operatorname{tg} \delta}{p_e}, \\ & \varepsilon_e - u_e = \arctg \left(\frac{q_e p_e^2 + q_e^2 - \sin^2 e}{p_e p_e^2 + q_e^2 + \sin^2 e} \right). \end{cases}$$

Führt man dieselben in die Gleichungen (7), (4) und (3) ein, so erhält man die Intensität, welche irgend einem Einfallswinkel e bei dem beliebigen Polarwinkel ω zukommt, wenn das zweite Nicol mit dem ersten den willkürlichen

1) Vgl. Wied Ann. **3**, p. 294. 1878 und Berl. Monatsber. I. c. p. 916

Winkel β bildet. Hiermit ist dann die gestellte Aufgabe gelöst.

Die bisher gewonnenen Formeln sind freilich verwickelt und wenig übersichtlich. Um sie einigermassen zu vereinfachen, denken wir uns das Absorptionsvermögen der Platte so gering, dass bereits die zweiten Potenzen von Δ und folglich von b und q vernachlässigt werden dürfen. Es werden dann die Refractionscoëfficienten N , r , a identisch und für eine gegebene Normalrichtung vom Einfallswinkel unabhängig. Man hat daher z. B.:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = a_2, \quad b_0 = b_2, \\ \frac{1}{a_n^2} = \frac{\cos^2 r_n}{a_2^2} + \frac{\sin^2 r_n}{a_1^2}, \\ 2a_0b_0 = (a_2^2 - 1) \sin \Delta_2, \quad 2a_nb_n = (a_n^2 - 1) \sin \Delta_n, \\ p_0 = \sqrt{a_2^2 - \sin^2 e} = a_2 \cos r_0, \quad p_e = \sqrt{a_n^2 - \sin^2 e} = a_n \cos r_n, \\ q_0 = \frac{a_2 b_2}{\sqrt{a_2^2 - \sin^2 e}} = \frac{b_2}{\cos r_0}, \quad q_e = \frac{a_n b_n}{\sqrt{a_n^2 - \sin^2 e}} = \frac{b_n}{\cos r_n}. \end{array} \right.$$

Der Wegunterschied wird jetzt zufolge Gl. (7):

$$(17) \quad G = da_2 \left(\sqrt{1 - \frac{\sin^2 e}{a_1^2}} - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 e}{a_2^2}} \right),$$

sofern nämlich noch das variable Brechungsverhältniss a_n durch die beiden festen axialen a_1 , a_2 ausgedrückt wird.¹⁾

Die Schwächungscoëfficienten reduciren sich auf:

$$(18) \quad \mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}'_0 = \frac{4a_2 \cos e \cos r_0}{(a_2 \cos r_0 + \cos e)^2}, \quad \mathfrak{D}_e \mathfrak{D}'_e = \frac{4a_n \cos e \cos r_n}{(a_n \cos e + \cos r_n)^2},$$

worin:

$$r_n = r_n + \delta, \quad a_n = a_n \cos \delta,$$

Endlich erhalten die Phasenänderungen die Werthe:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_0 + \chi'_0 = \frac{q_0}{p_e} \frac{1 - a_2^2}{(a_2 \cos r_0 + \cos e)^2}, \\ \chi_e + \chi'_e = \frac{q_e}{p_e} \frac{\cos r_n - a_n \cos e}{\cos r_n + a_n \cos e} \cos 2r_n, \end{array} \right.$$

1) Vgl. darüber die vollständigeren Lehrbücher.

welch letzterer für die Incidenz des Polarisationswinkels verschwindet.

Wäre überdies das vorausgesetzte Mittel bezüglich seiner Bestandtheile symmetrisch constituirt und damit zugleich Δ von der Orientirung unabhängig, so entwickelt sich leicht:

$$(20) \quad \frac{b_n}{a_n} = \frac{b_2}{a_1} \cos^2 r_n + \frac{b_1}{a_1} \sin^2 r_n.$$

Man könnte schliesslich in der Vereinfachung noch einen Schritt weiter gehen, nämlich die doppelbrechende Platte als ausserordentlich dick, aber als nahezu durchsichtig voraussetzen. In diesem Falle würden die b , q und folglich auch χ zu vernachlässigen sein, dahingegen wären die Producte qd als endliche Grössen beizubehalten.

Dass übrigens die betreffende Interferenzerscheinung in der von Hrn. Lommel beschriebenen Weise verlaufen muss, dass nämlich bei parallelen Nicols die Mitte der Platte gleichförmig erhellt ist, und erst in einiger Entfernung von derselben die Büschel sich zeigen, ist ohne jede Rechnung einzusehen. Nach Hrn. Lommel's Meinung ist das Zustandekommen derselben an den Beginn der totalen Reflexion¹⁾ geknüpft, während nach der hier vorgetragenen Theorie nicht bloß Refractions- und Absorptionscoefficient, sondern auch die resp. Verschiedenheiten beider in aufeinander senkrechten Richtungen direct und in continuirlichem Verfluss von der Incidenz abhängig sind.

Auf eine nähere Kritik von Hrn. Lommel's Ansichten gehe ich hier nicht ein; vielleicht dürfte gerade der letztcitirte Aufsatz die, wie ich meine, dringlich gewordene Entscheidung herbeiführen.

Bonn, Ende April 1880.

1) Vgl. Carl's Repert. 16. p. 261. 1880.

XI. Ueber die Polarisation des gebeugten Lichts; von Dr. M. Réthy,

Prof. a. d. Universität zu Klausenburg.

Die Fresnel'sche Erklärung der Beugungserscheinungen umfasst bekanntlich nur die Intensitätsverhältnisse. Eine Drehung der Polarisationssebene durch Beugung wurde zuerst beobachtet von Stokes,¹⁾ der zur Erklärung seiner Versuche eine Theorie gab, welche bei der Fresnel'schen Voraussetzung, dass Schwingungs- und Polarisationsrichtung auf einander senkrecht stehen, zur Relation führte: $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 \cos \delta$; dabei bezeichnet φ das Polarisationsazimuth im unendlich weit entfernten Punkt eines Strahls, dessen Beugungswinkel δ ist; während φ_0 der Werth von φ ist, für $\delta = 0$. Die Beziehung stimmte mit den Versuchen überein, woraus Stokes folgerte, dass nur die Fresnel'sche Voraussetzung über Schwingungs- und Polarisationsrichtungen der Natur entsprechen kañ. Indess ergaben sich auch Versuchsreihen, die das Stokes'sche Gesetz nicht befolgten, und es wurden neue Theorien der Erscheinung versucht. Die umfassendsten Versuche hat, soviel ich weiss, Quincke²⁾ angestellt; er konnte auf Grundlage derselben aussprechen, dass die gegenseitige Lage von Schwingungs- und Polarisationsrichtung beim gegenwärtigen Stand der Theorie nicht entschieden werden kann. Die Versuche von Quincke zeigten in der That das vor der Beugung unter dem Azimuth 45° polarisirte Licht nach der Beugung nicht nur elliptisch polarisirt, sondern die Phasendifferenz der parallel und senkrecht zur Beugungsebene polarisirten Hauptcomponenten, sowie auch das reducirte Polarisationsazimuth nahm bei wachsendem Beugungswinkel periodisch zu und ab; Erscheinungen, die sich aus keiner der aufgestellten Theorien voraussehen liessen.

Die letzten Versuche, die ich bezüglich der Polarisation

1) Stokes, Cambridge Trans. **9**. p. 1. 1850.

2) Quincke, Pogg. Ann. **149**. p. 273. 1873.

des gebeugten Lichtes kenne, rühren von Fröhlich¹⁾ her. Er fand das unter dem Azimuth 45° polarisirte auf das Furchengitter unter verschiedenen Winkeln einfallende Licht nach Reflexion und Brechung — mit einem Nicol'schen Prisma untersucht — merklich linear polarisirt; die Azimuthe der reflectirt gebeugten Strahlen wichen vom Stokes'schen Gesetze stark ab; trotzdem glaubte Fröhlich, durch theoretische Betrachtungen geleitet, in seinen Versuchen eine Bestätigung der Stokes'schen Schlussfolgerung erblicken zu dürfen. Diese Arbeit veranlasste mich, die Anstellung neuer Versuche mir zur Aufgabe zu machen. Indem ich zum Ausgangspunkt eine Darstellung der Beugungstheorie wählte, die von Kirchhoff herrührt, und die ich im Sommersemester 1874 als Hörer an der Heidelberger Universität aus Vorträgen des genannten Physikers kennen gelernt habe, gelang es mir leicht, eine Beziehung zwischen Beugungswinkel und Vibrationsrichtung im gebeugten Strahl abzuleiten, welche bei der Neumann'schen Annahme über Schwingungs- und Polarisationsrichtung das Stokes'sche Gesetz ($\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 \cos \delta$) als Specialfall umfasst und auch die Fröhlich'schen Versuche genügend genau darstellt. Ich wurde zugleich zu allgemeineren Aufstellungen geführt, welche zur Anbahnung einer Darstellung der Versuche von Quincke geeignet schienen. Diese Untersuchungen wurden von mir der ungarischen Academie der Wissenschaften am 15. März 1880 vorgelegt; nach dem Ideengang dieser Abhandlung erscheint die Neumann'sche Polarisationshypothese als die wahrscheinlichere. Ich bekenne jedoch, dass ich in dieser Schlussfolgerung voreilig war. Im Nachfolgenden soll eine gemeinsame Theorie der Versuche von Stokes²⁾, Holtzmann, Fröhlich und einiger Versuche von Quincke gegeben werden in einer Darstellung, die den Vortheil gewährt, dass sie ihre Gültigkeit behält, ob man sich für die eine oder die andere Polarisationshypothese entscheidet; man wird daher in dieser Theorie eine Bestätigung des Quincke'schen Ausspruchs erblicken.

1) Fröhlich, Wied. Ann. 1. p. 321. 1877.

2) M. Réthy, Magyar Tud. Acad. Ertek. 7. p. 16. 1880.

3) Holtzmann, Pogg. Ann. 99. p. 446. 1856.

I. Nach der Elasticitätstheorie des Lichts entsprechen die Lichtschwingungen im isotropen homogenen Aether den Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \end{array} \right.$$

in ihnen bezeichnen u, v, w die Componenten des Ausschlags aus der Ruhelage, bestimmt durch die Coordinaten x, y, z ; a bezeichnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts; t die Zeit; endlich ist abgekürzt geschrieben:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Eine particuläre Lösung der Gleichungen bildet bekanntlich folgendes System von Gleichungen:

$$(1) \quad u = \frac{d\varphi}{dy}, \quad v = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad w = 0, \quad \varphi = \frac{A}{r} \cos 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right), \quad \frac{\lambda}{T} = a;$$

hier bezeichnen A, λ, T, δ constante Grössen, und es bezeichnet r die Entfernung des variablen Punktes x, y, z von einem bestimmten sonst willkürlich gewählten.

Eine zweite particuläre Lösung bildet, wie bekannt, auch das folgende System:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{dv'}{dz}, \quad v = -\frac{du'}{dz}, \quad w = -\frac{dv'}{dx} + \frac{du'}{dy}, \\ u' = \frac{d\varphi'}{dy}, \quad v' = -\frac{d\varphi'}{dx}, \quad \varphi' = \frac{A'}{r} \sin 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right), \end{array} \right.$$

wo die neu eingeführte Grösse A' auch eine Constante bedeutet.

Durch beide Lösungen werden Wellen von der Länge λ und der Schwingungsdauer T dargestellt, die sich im Aether vom Anfangspunkte der r (Vibrationscentrum) ausgehend, nach allen Richtungen mit der Geschwindigkeit a fortpflanzen. Die Schwingungen stehen senkrecht auf dem Strahl r . Wir wollen im Fall der Lösung (2) Grössen von der Ordnung $\frac{A'}{\lambda}$ und A' im Vergleich zu solchen von der Ordnung $\frac{A}{\lambda^2}$ vernachlässigen, was erlaubt ist, wenn λ die Wellenlänge des Lichts bedeutet. Dann ist als typischer Unterschied

zwischen den durch (1) und (2) dargestellten Wellen hervorzuheben, dass im ersten Fall die Vibrationen, im zweiten aber die Normalen der Vibrationsebenen senkrecht stehen auf einer bestimmten Richtung, — der „Polaraxe“ z ; wir verstehen dabei unter Vibrations-ebene eine solche, die parallel zum Strahl und zur Schwingungsrichtung geführt ist.

Die Wellen entsprechen in beiden Fällen linear polarisirten kugeligen Lichtwellen, die aus dem im Anfangspunkt der r gelegenen leuchtenden Punkt nach allen Richtungen mit der Geschwindigkeit a fortschreiten.

Nimmt man in den Lösungen (1) und (2) an Stelle von φ und φ' je einen allgemeinen Ausdruck, welcher der Gleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = a^2 \Delta \varphi$$

entspricht, einen Ausdruck, dessen periodischer Factor eine Function von $\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}$ ist, so behalten die Wellen doch die soeben auseinandergesetzten allgemeinen Charaktere.

Man kann durch additive Zusammenstellung solcher particulärer Lösungen neue herstellen, die ebenfalls dem von einem Punkt ausgehenden linear polarisirten Licht entsprechen; der Charakter solcher Wellen wird im allgemeinen verschieden sein von dem der soeben dargestellten.

II. Einen indirecten Weg zur Entscheidung, ob Lichtwellen von den soeben dargestellten Charakteren vorkommen können, bieten die Beugungserscheinungen, wo nach der Fresnel'schen Auffassungsweise leuchtende Flächen auftreten, deren Elemente für sich kugelige Wellen aussenden, die durch Interferenz die Erscheinung hervorbringen.

1) Wir wollen die Annahme machen, dass die einzelnen Elemente der durchsichtigen Stellen des Gitters Kugelwellen aussenden vom Charakter der durch die Gleichungen (1) dargestellten, wir supponiren ferner, dass die Polaraxen für sämtliche Elementarwellen parallel sind.

Dann ist klar, dass die durch Zusammenwirkung sämtlicher Wellen resultirenden Vibrationen in einem beliebigen Punkte des Aethers den Polarisationszustand der Compo-

nenten bewahren, also senkrecht zur Polaraxe und in unendlich weit gelegenen Punkten ausserdem senkrecht zur entsprechenden Strahlenrichtung sind.

2) Nehmen wir an, dass die Flächenelemente Kugeln von der zweiten Art aussenden, und zwar wiederum so, dass die Polaraxen für alle parallel sind, so werden im Unendlichen die resultirenden Schwingungen auch hier den speciellen gemeinsamen Charakter der einzelnen bewahren, also werden die Normalen der resultirenden Schwingungsebenen senkrecht stehen auf der Polaraxe und dem entsprechenden Strahl.

Wir können daher, gleichgültig ob die Polarisationsrichtung identisch ist mit der Schwingungsrichtung oder auf letzterer senkrecht steht, folgende Sätze aussprechen:

1) Es gibt möglicherweise Beugungsgitter, welche das einfallende linear polarisirte Licht derart beugen, dass die Polarisationsrichtungen in beliebigen (durchgehend, resp. reflectirt) gebeugten Strahlen senkrecht stehen auf einer und derselben Geraden. Wir wollen solche Gitter Gitter von der ersten Art, die Gerade Polaraxe nennen.

2) Es gibt möglicherweise Beugungsgitter, bei welchen die Normalen der Polarisationssebenen in beliebigen (durchgehend, resp. reflectirt) gebeugten Strahlen senkrecht stehen auf einer und derselben Geraden. Wir werden solche Gitter Gitter von der zweiten Art, die Gerade Polaraxe nennen.

Es leuchtet ein, dass das gebeugte Licht in beiden Fällen linear polarisirt ist.

Wir werden uns überzeugen, dass die Furchengitter von Stokes, Mascart¹⁾ und Fröhlich annähernd von der ersten Art, das Russgitter von Holtzmann von der zweiten Art waren.

Man bezeichne mit P die Normale der Polarisations-ebene für einen gebeugten Strahl r ; mit P_0 die im ungebeugten Strahl r_0 ; mit δ den Beugungswinkel; mit p die

1) Mascart, Compt. rend. 63. p. 1005. 1866.

Polaraxe; mit B die Normale der Beugungsebene; mit e den Winkel zwischen p und r_0 . Man führe durch einen beliebigen Punkt Parallelen zu allen diesen Richtungen und construire ein sphärisches Dreieck, dessen Ecken in die Geraden P , P_0 und B fallen.

Wir wollen zuerst ein Gitter von der zweiten Art voraussetzen. Dann ist p die Normale der Ebene (P_0 , P). Ferner ist r_0 die Normale von (P_0 , B). Der Winkel (p , r_0) ist daher gleich dem an der Kante P_0 gelegenen sphärischen Winkel e .

Da ferner r_0 normal steht auf der Ebene (P_0 , B) und r auf (P , B), so ist der Winkel (r_0 , r), d. i. der Beugungswinkel δ gleich dem an der Kante B gelegenen sphärischen Winkel.

Mit Rücksicht auf die hervorgehobenen Sätze erhält man bei Anwendung eines bekannten trigonometrischen Lehrsatzes:

$$(3) \sin (P_0, B) \operatorname{ctg} (P, B) = \sin \delta \operatorname{ctg} e + \cos \delta \cos (P_0, B).$$

Nun sind aber die Winkel (P , B) und (P_0 , B) die Polarisationsazimuthe φ , resp. φ_0 im gebeugten, resp. ungebeugten Strahl. Man hat daher:

$$(4) \sin \varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi = \sin \delta \operatorname{ctg} e + \cos \delta \cos \varphi_0.$$

Wir sehen in dieser Gleichung die Relation vor uns, welche zwischen Azimuth und Beugungswinkel besteht bei Gittern von der zweiten Art. In ihr bezeichnen e und φ_0 Constanten, die von der Beschaffenheit des Gitters und auch vom Einfallswinkel und Polarisationswinkel des einfallenden Strahls abhängen; ist speciell $e = 90^\circ$, so hat man:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \varphi_0 \cos \delta.$$

Dieses Gesetz befolgen mit rohen Annäherung, wie bekannt, die Versuche von Holtzmann.

Was die Beugungsgitter von der ersten Art anbelangt, so leuchtet ohne weiteres ein, dass die Gleichung (3) auch für sie Bestand hat, vorausgesetzt, dass man jetzt mit P und P_0 die Polarisationsrichtungen selbst bezeichnet; demgemäss ist hier statt (P , B) das Complement des Azimuthes zu

setzen. Es besteht daher für Beugungsgitter erster Art die Relation:

$$(5) \quad \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi = \sin \delta \operatorname{ctg} \epsilon + \cos \delta \sin \varphi_0.$$

Wird speciell $\epsilon = 90^\circ$ gesetzt, so hat man:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 \cos \delta.$$

Dieses Gesetz befolgen, wie bekannt, die Versuche von Stokes, und man kann sagen, auch die von Mascart.

III. Wir gehen zum hauptsächlichsten Gegenstand dieser Zeilen über, nämlich zum Nachweiss, dass die Versuche von Fröhlich durch die Formel (5) annähernd dargestellt werden. Dieses wird durch die nachfolgenden Tabellen nachgewiesen. In ihnen sind in der ersten Columnne die Beugungswinkel, in der zweiten die beobachteten, in der dritten die gemäss der Formel (5) berechneten Azimuthe verzeichnet; in der vierten Columnne steht die Differenz zwischen beobachteten und berechneten Azimuthen.

Es muss hier bemerkt werden, dass die Formel zum bequemeren Gebrauch erst in die Form gebracht wurde:

$$\operatorname{tg} \varphi = a \cos \delta + b \sin \delta;$$

man berechnete dann aus den von Fröhlich mit dem breiteren Gitter (Furchenabstand 0,0579 mm) angestellten Versuchen die Constanten a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate; man setzte nun:

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{a}{b}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

und erhielt (mit i den Einfallswinkel bezeichnet):

$$\text{für } i = 25^\circ, \quad \epsilon = 122^\circ 8', \quad \log c = -0,0419,$$

$$,, \quad i = 55^\circ, \quad \epsilon = -2^\circ 44', \quad \log c = -0,0878,$$

$$,, \quad i = 85^\circ, \quad \epsilon = 45^\circ 25', \quad \log c = 0,0579.$$

So konnten dann die Azimuthe bequem berechnet werden mittelst der mit (5) äquivalenten Formel:

$$\operatorname{tg} \varphi = c \sin (\delta + \epsilon).$$

Für das engere Gitter (Furchenabstand 0,00617 mm) wurden bei $i = 25^\circ$ und $i = 85^\circ$ dieselben numerischen Werthe von c und ϵ beibehalten. Bei $i = 55^\circ$ war hingegen, wenn man die oben angegebenen Werthe beibehält, die Differenz zwischen beobachteten und berechneten Azimuthen viel zu gross; die Constanten wurden daher hier nach der auseinander

gesetzten Methode separat berechnet; es ergab sich $\epsilon = -2^{\circ} 46'$,
 $\log c = -0,1123$.

Engeres Gitter $i = 55^{\circ}$.

δ	beob. q	ber. q	Diff.	δ	beob. q	ber. q	Diff.
26° 54'	16° 4'	17° 31'	+1° 27'	7° 15'	8° 11'	7° 39'	+ 42'
22 54	13 20	14 53	+1 23	7 48	8 14	8 6	+ 8
18 53	11 26	12 6	+ 40	8 41	8 45	8 43	+ 2
12 50	7 44	7 41	- 4	9 33	9 16	9 22	- 6
11 6	7 —	6 23	- 37	12 12	11 58	11 18	+ 40
9 55	6 19	5 29	- 50	13 37	12 55	12 18	+ 37
8 56	5 21	4 45	- 36	14 36	14 1	12 59	+1° 2
7 52	+4 53	+3 56	- 57	16 7	15 13	14 2	+1 11
0 —	-0 56	-2 8	-1 12	17 45	16 20	15 9	+1 11
6 28	7 56	7 4	+ 52				

Breiteres Gitter $i = 55^{\circ}$.

δ	beob. q	ber. q	Diff.	δ	beob. q	ber. q	Diff.
21° 36'	13° 58'	14° 48'	+ 50'	1° —	3° 9'	3° 3'	+ 6'
19 41	13 12	13 24	+ 12	2 —	3 47	3 52	- 5
17 51	11 59	12 3	+ 4	3 —	4 58	4 40	+ 18
16 6	10 58	10 42	- 16	4 —	5 44	5 28	+ 16
14 26	9 44	9 24	- 20	5 4	6 29	6 20	+ 9
12 51	8 8	8 10	+ 2	6 14	7 1	7 15	- 14
11 21	6 58	6 59	+ 1	7 29	7 43	8 15	- 32
9 56	6 3	5 51	- 12	8 49	8 29	9 17	- 48
8 36	5 6	4 46	- 20	10 14	9 51	10 23	- 32
7 21	3 50	3 46	- 4	11 44	11 16	11 30	- 14
6 11	2 55	2 49	- 6	13 19	12 41	12 44	- 3
5 6	1 50	1 56	+ 6	14 59	14 5	13 58	+ 7
4 3	+0 52	1 4	+ 12	16 44	15 37	15 14	+ 23
3 —	-0 6	+0 12	+ 18	18 34	16 50	16 32	+ 18
2 —	0 51	-0 36	+ 15	20 29	18 4	17 51	+ 13
1 —	1 13	1 25	- 12	22 29	19 55	19 12	+ 43
0 —	1 52	2 14	- 22				

Ein Blick zeigt, dass die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Azimuthen bei fünf Beobachtungsreihen eine genügende ist, während die Differenz in der zuletzt angeführten Beobachtungsreihe ($i = 55^{\circ}$, engeres Gitter) die Fehlergrenzen der Beobachtung in einigen Fällen weit überschreitet. Auch hier ist die wahrscheinliche Ursache leicht anzugeben. Man sieht nämlich, dass das direct reflectirte Licht sehr nahe in der Einfallsebene polarisirt war; das Azimuth der einfallenden Strahlen war aber 45° ; daraus schliesst man, dass der Polarisationswinkel des Gitterglases nahe 55° ist. Es musste

Engeres Gitter $i = 25^\circ$.

δ	beob. φ	ber. φ	Diff.
14° 28'	—32° 12'	—31° 58'	+14'
12 54	32 37	32 41	— 4
11 27	33 17	33 20	— 3
10 30	33 57	33 45	+12
9 12	34 29	34 18	+11
7 4	35 2	35 8	— 6
6 16	35 7	35 26	—19
5 32	35 25	35 43	—18
5 —	35 36	35 54	—18
4 32	36 8	36 4	+ 4
0 —	37 18	37 34	—16
4 20	38 43	38 46	— 3
5 —	39 9	38 57	+12
5 23	39 10	39 3	+ 7
5 52	39 11	39 10	+ 1
6 28	39 33	39 18	+15

Breiteres Gitter $i = 85^\circ$.

δ	beob. φ	ber. φ	Diff.
0° 0'	39° 32'	39° 9'	—23'
3 3	37 32	37 36	+ 4
4 12	36 54	36 58	+ 4
5 16	36 3	36 23	+20
6 22	35 23	35 45	+22
7 27	34 48	35 6	—18
8 43	34 10	34 20	+10
9 56	33 29	33 33	+ 4
11 14	32 30	32 42	+12
12 46	31 37	31 39	+ 2
14 19	30 44	30 33	—11
15 56	29 59	29 21	—38
17 29	28 30	28 10	—20
19 16	27 9	26 44	+85
21 12	25 49	25 7	—42
23 23	23 14	23 12	— 2
25 26	21 36	21 20	—16
27 36	18 24	19 16	+52
30 —	16 22	16 54	+32

Breiteres Gitter $i = 25^\circ$.

δ	beob. φ	ber. φ	Diff.
21° 36'	—29° 18'	—28° 15'	+1° 3'
19 49	29 47	29 16	+ 31
17 51	30 14	30 17	+ 15
16 6	30 57	31 10	— 13
14 26	31 34	31 59	— 25
12 51	32 14	32 43	— 29
11 21	32 54	33 23	— 29
9 56	33 32	33 59	— 27
8 36	34 26	34 32	— 6
7 21	35 3	35 1	+ 2
6 11	35 32	35 28	+ 4
5 6	35 53	35 52	+ 1
4 3	36 9	36 14	— 5
3 —	36 29	36 36	— 7
2 —	36 44	36 56	— 12
1 —	37 —	37 15	— 15
0 —	37 1	37 34	— 33
1 —	37 36	37 52	— 16
2 —	38 14	38 9	+ 5
3 —	38 41	38 26	+ 15
4 —	38 55	38 41	+ 14
5 4	39 6	38 57	+ 9
6 14	39 38	39 15	+ 23

Engeres Gitter $i = 85^\circ$.

δ	beob. φ	ber. φ	Diff.
0° 0'	39° 37'	39° 9'	— 28'
17 6	28 19	28 29	+ 10
18 26	27 27	27 24	— 3
19 22	26 30	26 39	+ 9
20 45	25 37	25 30	— 7
22 10	24 40	24 17	— 13
26 6	20 24	20 42	+ 16
28 —	19 1	18 53	— 17
29 23	17 42	17 31	— 11
31 24	16 2	15 28	— 34
33 13	15 1	13 34	—1°27

daher das direct reflectirte, umsomehr das reflectirt gebeugte Licht elliptisch polarisirt erscheinen. Es wäre leicht, Formeln zu gewinnen, die auch solche Erscheinungen umfassen. Da indess Fröhlich eine elliptische Polarisation wohl beobachtet hat, jedoch aus Mangel an geeigneten Hilfsmitteln nicht messend verfolgen konnte, so glaube ich, die Rechnung für jetzt unterlassen zu dürfen.

Klausenburg, Juli 1880.

XII. Ueber die Veränderungen der Funken- und Büschelerscheinungen durch Umkleidungen der Electroden; von W. Holtz.

Die Folgerungen, zu welchen Wiedemann und Rühlmann in ihren Untersuchungen: „Ueber den Durchgang der Electricität durch Gase“¹⁾ gelangten, veranlassten mich, einige Versuche anzustellen wieweit sich die bekannten Lichterscheinungen in der Luft durch verschiedene Umhüllungen der Electroden umgestalten liessen. Jene Autoren waren nämlich zu der Annahme gelangt, dass die polaren Unterschiede der Lichterscheinungen wohl zum Theil auf eine den Electroden mehr oder weniger anhaftende und mehr oder weniger condensirte Gasschicht beruhen möchten (p. 394). Hiernach mussten aber auch andere Umhüllungen, sei es, dass sie einer solchen Schicht analog wirkten, sei es, dass sie die Bildung einer solchen begünstigten, von wesentlichem Einflusse sein. Diese Erwartung bestätigte sich, wenigstens für die Lichterscheinungen in gewöhnlicher Luft, d. h. innerhalb der Grenzen der überhaupt angestellten Versuche. Ich fand, dass man die bekannten polaren Unterschiede durch entsprechende Umhüllungen der Electroden fast ganz ver-
 wischen könne.

Bei vollständiger Umhüllung.

Es ist bekannt, dass man sehr grosse Unterschiede in der Funkenlänge erhält, je nachdem bei ungleichen Electroden die positive oder die negative die grössere ist. So erhielt ich bei meiner Influenzmaschine, wenn ich einen Kegel von 60° einer Kugel von 24 mm Durchmesser gegenüberstellte, in einem Falle 5, im andern 15 mm lange Funken. Ganz anders aber stellte sich die Sache, als ich die Kegelelectrode ähnlich, wie es in nebenstehender Figur an einer Kugel veranschaulicht ist, mit einer mehr-



Fig. 1.

1) Wiedemann u. Rühlmann, Pogg. Ann. **145**. p. 235. 1872.

fachen Lage von Seidenzeug umgab. Ich erhielt nun in beiden Fällen 110 mm lange Funken, gleichviel ob der Kegel oder die Kugel die positive Electrode war. Wurde die Kugel umhüllt, so stellte sich freilich ein Unterschied wieder ein, denn die Schlagweite war 30 mm gross, wenn die Kugel positiv, 20 mm, wenn sie negativ-electrisch war, immerhin war der Unterschied weniger gross, als wenn beiden Electroden die Umhüllung fehlte. Aehnlich verhielt sich die Sache, wenn einer 24 mm grossen Kugel eine andere, welche 87 mm gross war, gegenübergestellt wurde, insofern wenigstens, als ich auch hier den polaren Unterschied durch eine entsprechende Bekleidung der einen oder anderen Electrode fast ganz verwischen konnte. Waren beide Electroden gleich, und gleichviel ob Kugeln oder Kegel, so wurden allemal längere Funken gewonnen, wenn die positive und nicht die negative Electrode bekleidet war. Nicht unter allen Umständen jedoch war die Funkenlänge eine grössere, als wenn jede Verhüllung fehlte, sondern dies war vorwiegend nur bei Kegeln und kleineren Kugeln der Fall. Hieraus kann wohl geschlossen werden, dass die Wirkung der Umhüllung nicht darauf allein basirte, dass sie die Ausströmung d. h. die Büschelbildung erschwerte.

Es ist ferner bekannt, dass man bei gleichen Electroden, namentlich kleineren Kugeln, an beiden Seiten ganz verschiedene Büschelerscheinungen erhält. An der positiven tritt ein Gebilde auf, welches die Kugel in einem längeren und meistentheils einem einzigen Stiele verlässt, während der negative Büschel, von sonstigen Unterschieden abgesehen, in vielen Stielen und meistentheils auch vielen Punkten aus der Kugel tritt. Nur bei einer ganz bestimmten Grösse der Electroden und ihrer Entfernung nimmt die Erscheinung die bekannte eiförmige, nach beiden Seiten hin fast gleiche Gestaltung an. Dieser Ausnahmefall aber wurde zur Regel, sobald ich die positive Electrode mit einer mehrfachen Lage von Seidenzeug umgab. Nur ausnahmsweise konnte jetzt noch der positive Büschel mit einem einzigen längeren Stiele erhalten werden. Für gewöhnlich brachen aus der ganzen vorderen Hälfte der Kugel unzählige kleinere Büschel her-

vor. Eine ähnliche Erscheinung habe ich übrigens auch ohne jene Umkleidung dadurch erhalten, dass ich die positive Electrode behauchte, oder auf andere Weise mit einer dünnen Feuchtigkeitsschicht umgab. Aber auch der negative Büschel lässt sich dem gewöhnlichen langgestielten positiven Büschel mehr oder weniger ähnlich machen, wenn man die negative Electrode mit der gedachten Umhüllung versieht, und dies umsomehr, je dicker dieselbe ist, und umsomehr auch, je grösser überhaupt beide Electroden sind. Der negative Büschel bleibt freilich immer viel kürzer und ärmer an Verästelungen, als es der positive Büschel ist, aber er gewinnt doch, was er sonst nie besitzt, einen einzigen längeren Stiel, an welchem in verschiedenen Punkten seitliche Aeste angesetzt sind. Dass man eine ähnliche Erscheinung übrigens auch ohne Umhüllung erhalten kann, wenn man eine sehr grosse negative Electrode einer noch grösseren positiven gegenüberstellt, habe ich bereits an einer früheren Stelle mitgetheilt.¹⁾

Bei unvollständiger Umhüllung.

Die unvollständige Umhüllung bestand darin, dass ich einen Schirm in Gestalt eines Ebonitringes, welcher mit Seidenzeug bespannt war, vor die eine oder die andere Electrode stellte (siehe die nebenstehende Figur). Ich benutzte diese Methode, weil es mir daran gelegen war, zugleich den Einfluss der grösseren oder geringeren Entfernung der Umhüllung von gedachter Electrode zu studiren. Uebrigens wandte ich auch bedingungsweise zwei solche Schirme an, wenn es sich um die gleichzeitige Umhüllung beider Electroden handelte.

Mit diesen Mitteln konnte ich nun in der That eine sehr grosse Mannigfaltigkeit sowohl der Funken- als der Büschelerscheinungen gewinnen, ich stehe jedoch davon ab,



Fig. 2.

1) W. Holtz, Pogg. Ann. 156. p. 493. 1875.

dieselben zu beschreiben, weil sie sich schwer beschreiben lassen, und weil jeder, welcher sich dafür interessirt, dieselben leicht wiedergewinnen kann. Ich bemerke nur, dass sich der Hauptsache nach das frühere Ergebniss wiederholte, sowohl was die Funkenlänge, als was die Gestaltung der Büschel betraf, sofern nämlich ein Schirm vor die positive Electrode gerückt, vorzugsweise längere Funken und vielstielige positive Büschel lieferte. Auch bemerke ich nebenbei, dass ich bei Anwendung zugespitzter Electroden bei geeigneter Stellung der Schirme sogar längere Funken als sonst mit den geeignetsten Kugelelectroden erhalten konnte.

Statt der Umhüllungen von Seidenzeug habe ich übrigens mit mehr oder weniger ähnlichem Erfolge auch solche von etwas besser leitenden Stoffen, Leinen, Wollenzeug und Papier in Anwendung gebracht.

XIII. *Ueber atmosphärische Schallstrahlenbrechung; von A. Kneser.*

Die Thatsache, dass ein Schall von constanter Stärke in ruhiger Atmosphäre bis zu sehr verschiedenen Entfernungen hörbar sein kann, ist hauptsächlich durch Tyndall's Beobachtungen an den South-Foreland-Felsen¹⁾ klargestellt; der Radius des Hörbarkeitskreises einer Kanone variirte hier zwischen 2 und 15 engl. Meilen, indem das Minimum bei völliger Windstille an einem klaren Julimorgen erreicht wurde. Reynolds²⁾ erklärt diese Thatsache aus einer Refraction der Schallstrahlen nach oben hin. In den höheren Schichten der Atmosphäre nimmt die Temperatur ab; die Dichtigkeit wächst, ohne dass die Elasticität sich wesentlich ändert. Dem Quotienten der letztern durch erstere ist nun das Quadrat der Schallgeschwindigkeit proportional; der Schall pflanzt sich also in den höheren Schichten langsamer

1) Tyndall, Phil. Mag. (4) 50. p. 74 ff.

2) Reynolds, ibid. p. 71 ff.

als in den tieferen fort. Der obere Theil einer Schallwelle, welche die Atmosphäre in schräger oder horizontaler Richtung durchschneidet, wird gegen den unteren verzögert; der Schallstrahl wird also nach oben hin gebrochen und bildet eine gegen den Erdboden convexe Linie. Reynolds characterisirt a. a. O. diese Schallcurven als Kreise, die sich bei grösserer Erhebung parabolisch gestalten; seine Angaben ermangeln hierin also mathematischer Exactheit.

Es soll nun im Folgenden die Schallcurve genauer discutirt werden; die daraus folgenden einfachen Formeln werden eine befriedigende Uebereinstimmung mit Tyndall's Beobachtungen ergeben; zugleich soll nachgewiesen werden, dass infolge der Krümmung des Schallweges bei der experimentellen Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in freier Luft ein messbarer Fehler entstehen kann, dessen Grösse an einem Beispiel demonstriert werden soll.

Ein beliebiger der zweifach unendlich vielen, von einem Punkte der Atmosphäre ausgehenden Schallstrahlen möge die durch seinen Entstehungsort gehende Luftschicht unter dem Einfallswinkel i_1 , zwei beliebige aufeinanderfolgende Schichten unter den unendlich wenig verschiedenen Einfallswinkeln i , $i + di$ durchschneiden; dann ist nach einem bekannten Gesetze der Wellentheorie:

$$\frac{\sin(i + di)}{\sin i} = \frac{v + dv}{v},$$

wenn v die Schallgeschwindigkeit in der betreffenden Schicht bedeutet; oder:

$$\sin i = Cv.$$

Hat der Ausgangspunkt des Schalles die Temperatur t_1 , so ist die Schallgeschwindigkeit, wenn $t = 0,00367$:

$$v_1 = u\sqrt{1 + \alpha t_1},$$

also:

$$\sin i_1 = Cu\sqrt{1 + \alpha t_1}.$$

Nun ist allgemein $\sin i = Cu\sqrt{1 + \alpha t}$, also:

$$(1) \quad \sin i = \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}} \sin i_1.$$

Damit ist der Einfallswinkel des Schallstrahls in die Luftschicht von der Temperatur t oder seine Neigung

gegen die durch den Ausgangspunkt gehende Verticale gegeben.

Dringt der Schallstrahl in tiefere und wärmere Luftschichten ein, so wächst $\sin i$ und damit i beständig; es wird $i = 90^\circ$, d. h. der Schallstrahl wird horizontal für:

$$(2) \quad 1 + \alpha t = \frac{1 + \alpha t_1}{\sin i_1^2} \quad \text{oder} \quad t = \frac{1 + \alpha t_1}{\alpha \sin i_1^2} - \frac{1}{\alpha} = t_2.$$

In der durch diese Temperatur t_2 definirten Luftschicht erreicht der Strahl seinen tiefsten Punkt, weil für alle $t > t_2$ der Werth $\sin i > 1$ sein würde.

Ist t_2 gegeben und soll der Strahl i_1 in der hierdurch bestimmten Schicht seinen tiefsten Punkt erreichen, so ist:

$$(3) \quad \sqrt{\frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}} \sin i_1 = 1; \quad \sin i_1 = \sqrt{\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}} = \sin i_2.$$

Die Schicht t_2 wird von keinem Strahl $i_1 > i_2$ getroffen; der Strahl i_2 trifft keine Schicht $t > t_2$.

Hat der Schallstrahl sich in seinem tiefsten Punkte horizontal gestellt, so wird er aufwärts gebrochen; der nach oben gerichtete Theil seiner Bahn muss offenbar dem abwärts gehenden vollkommen symmetrisch sein; i nimmt also in jeder Schicht das Supplement des früheren Werthes in derselben an. Man hat also auch hier die Gleichung (1).

Macht man, um hieraus die Differentialgleichung der Schallcurve zu gewinnen, das Schallcentrum zum Ursprung, die hindurchgehende Verticale zur x -Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so ist:

$$\sin i = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \sin i_1 \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}},$$

$$\text{woraus folgt: } dy - \left\{ \frac{1 + \alpha t_1}{(1 + \alpha f(x)) \sin i_1^2} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} dx = 0.$$

Die Gleichung hat, weil exact, keine singuläre Lösung¹⁾, die dadurch repräsentirten Curven keine Umhüllungslinie; je zwei aufeinanderfolgende Schallstrahlen schneiden sich also nicht.

1) Boole, Treatise on diff. equations p. 177.

Ist nun t_2 die Temperatur der Erdoberfläche und wird letztere im Punkte $x_1 y_1$ von dem Strahle i_2 berührt, so kann sie nur von den Strahlen $i_1 \leq i_2$ getroffen werden. Dabei sind die Ordinaten y der letzteren Schnittpunkte nicht grösser als y_1 ; denn wäre $y > y_1$, so müsste (vgl. Taf. III Fig. 9) der zugehörige Schallstrahl wegen $i_1 < i_2$ zuerst links, dann wegen $y > y_1$ rechts von dem Strahl i_2 liegen, letztern also durchschneiden, was unmöglich ist. Alle Punkte der Erdoberfläche, deren Abstände von der durch das Schallcentrum gehenden Verticale $> y_1$ sind, sind also dem Schalle unzugänglich; y_1 ist also der Radius des Hörbarkeitskreises.

$$\text{Nun ist: } y = \int_0^x \frac{dy}{dx} dx = \int_{i_1}^i \operatorname{tg} i \frac{dx}{di} di;$$

setzt man ferner eine gleichförmige Temperaturabnahme von 1°C. für h Meter voraus, so ist:

$$t = t_1 + \frac{x}{h},$$

$$\text{also: } 1 + \alpha t = 1 + \alpha t_1 + \alpha \frac{x}{h} = \left(\frac{\sin i}{\sin i_1} \right)^2 (1 + \alpha t_1).$$

Führt man hieraus x in die Gleichung y ein und integrirt, so wird:

$$(4) \quad y = \frac{h(1 + \alpha t_1)}{\alpha \sin i_1^2} \left\{ (2i - \sin 2i) - (2i_1 - \sin 2i_1) \right\}.$$

Setzt man hierin $i = \frac{\pi}{2}$, so erhält man die Ordinate des tiefsten Punktes auf dem Strahle i_1 :

$$y_1 = \frac{h(1 + \alpha t_1)}{\alpha \sin i_1^2} (\pi - 2i_1 + \sin 2i_1).$$

Nun soll t_2 die Temperatur der Erdoberfläche sein; also wird der Radius des Hörbarkeitskreises auf derselben:

$$y_2 = \frac{h(1 + \alpha t_1)}{2\alpha \sin i_2^2} (\pi - 2i_2 + \sin 2i_2),$$

oder mit Berücksichtigung von Gl. (3):

$$y_2 = \frac{h(1 + \alpha t_2)}{2\alpha} (\pi - 2i_2 + \sin 2i_2).$$

Diese Formel vereinfacht sich noch durch Reduction von t_2 auf den absoluten Nullpunkt; man erhält:

$$y_2 = \frac{1}{2} h \left(\frac{1}{\alpha} + t_2 \right) (\pi - 2i_2 + \sin 2i_2),$$

oder, da $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,00367} = 273$ ist:

$$(5) \quad y_2 = \frac{1}{2} h T_2 (\pi - 2i_2 + \sin 2i_2),$$

wo $T_2 = 273 + t_2$.

Hierin sind h und T_2 der Beobachtung zu entnehmen; die Berechnung von i_2 kann noch durch Einführung des Temperaturzuwachses $\tau = t_2 - t_1$ vereinfacht werden.

Bei Einführung derselben in Gl. (3) erhält man:

$$(6) \quad \cos i_2 = \sqrt{\frac{\tau}{T_1}}.$$

Um nun auf Grund der Formeln (5) und (6) den numerischen Calcül für Tyndall's Beobachtung des Minimums der Hörbarkeitsweite durchzuführen, hat man zu berücksichtigen, dass die betreffende Beobachtung an einem warmen Julimorgen angestellt wurde; man hat also etwa (Angaben hierüber fehlen) die Temperatur auf der Erdoberfläche $t_2 = 15^\circ \text{ C.}$ oder $T_2 = 288$ zu setzen. Nach den von Reynolds citirten Angaben Glaisher's beträgt bei heiterem Himmel die Temperaturabnahme $0,5^\circ \text{ F.}$ für 100 Fuss, also in unserem Falle, da die Kanonen, deren Schallweite zu bestimmen ist, 235 Fuss = 70 m hoch standen, etwas über 1° F. oder etwa $0,6^\circ \text{ C.} = \tau$; daraus folgt $h = 117 \text{ m.}$

Man hat demnach $\cos i_2 = \sqrt{\frac{0,6}{288}}$ und dann nach Gl. (5):
 $y_2 = 3075 \text{ m.}$

Nun ist eine engl. Meile etwa = 1800 m; $y_2 = 1\frac{1}{4}$ engl. Meile. Berücksichtigt man, dass nach Tyndall bei zwei Meilen Entfernung ein 18-Pfünder noch vollkommen unhörbar war, dass ferner durch Divergenz des Schalles der Hörbarkeitskreis ausgedehnt wird¹⁾, so wird man in unserem Resultat eine befriedigende Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung erblicken.

Durch Vernachlässigung der Krümmung des Schallweges kann bei der experimentellen Bestimmung der mittlern

1) Reynolds, a. a. O. p. 74.

Schallgeschwindigkeit in freier Luft ein Fehler entstehen, wenn die Beobachtungen an einem die Luft schräg durchschneidenden Strahl gemacht werden. Die Länge s des gekrümmten Schallweges wird jedenfalls grösser sein als die geradlinige Entfernung s' des Beobachtungsortes vom Entstehungsorte des Schalles. Hätte dieser nun zum Uebergang vom einen zum andern die Zeit t gebraucht, so würde man ohne Rücksicht auf die Krümmung des Schallweges die mittlere Geschwindigkeit bestimmen:

$$V = \frac{s'}{t}.$$

Die wahre Geschwindigkeit ist aber:

$$W = \frac{s}{t} = V \cdot \frac{s}{s'}.$$

Die ohne Rücksicht auf die Krümmung abgeleitete Geschwindigkeit ist also zu klein; der Correctionsfactor ist $\frac{s}{s'}$.

Statt um s abzuleiten, wie gewöhnlich aus der Differentialgleichung der Schallcurve das Längendifferential zu bilden, führt folgender Weg kürzer zum Ziele.

Man hat offenbar:

$$ds = \frac{dx}{\cos i}.$$

also für die Länge des ganzen Schallstrahls bis zur Erdoberfläche:

$$s = \int_0^x \frac{dx}{\cos i} = \int_{i_1}^i \frac{dx}{\cos i} di,$$

wenn die obere Integrationsgrenze i den Einfallswinkel an der Erdoberfläche bedeutet. Bei Einführung von x wie bei Entwicklung von Gl. (4) folgt:

$$s = \frac{2h(1 + \alpha t_1)}{\alpha \sin i_1^2} (\cos i_1 - \cos i),$$

oder mit Berücksichtigung von Gl. (1) auch:

$$(7) \quad s = \frac{2h T_2 (\cos i_1 - \cos i)}{\sin i^2}.$$

Nimmt man, wie bei der oben behandelten Beobachtung Tyndall's, $i = 90^\circ$, $i_1 = 87^\circ 23' 2''$, $t_2 = 15^\circ \text{ C.}$, $h = 117 \text{ m}$ an, so ist $s = 2h T_2 \cos i_1$, also:

$$\frac{s}{s'} = 1,00035.$$

Hätte man also unter den vorliegenden Umständen in einer Entfernung von 3075 m die Schallgeschwindigkeit ohne Rücksicht auf die Krümmung des Schallweges z. B. zu 333 m bestimmt, so wäre die wahre Geschwindigkeit $333.1,00035 = 333,12$, eine Differenz, die bei der Genauigkeit der neueren Schallgeschwindigkeitsangaben immerhin ins Gewicht fallen dürfte.

In Praxi werden freilich die Werthe i und i_1 nicht bekannt, sondern durch die Lösung der transcendenten Gleichungen (1) und (4) zu bestimmen sein.

Physikalisches Seminar zu Rostock, 1880.

XIV. *Doppeltwirkende Quecksilberluftpumpe ohne Hahn; von F. Neesen.*

Im Nachstehenden gebe ich den Plan zu einer Quecksilberluftpumpe, bei deren Construction mich folgende Gesichtspunkte leiteten.

Ich suchte eine einfache Anordnung einer doppelt wirkenden Quecksilberluftpumpe, bei welcher, während eine Glaskugel sich mit Quecksilber füllte, eine andere gleichzeitig evacuirt wurde, und zwar sollte dabei für beide Kugeln dieselbe Quecksilbermenge gebraucht werden. Hähne und Schliffstücke wollte ich möglichst vermeiden. Das Quecksilber sollte möglichst nur mit Glas in Berührung kommen. Der ganze Apparat muss einfach functioniren, und schliesslich sollte er möglichst wenig kostspielig sein.

Die vorstehenden Ziele glaube ich zu erreichen durch eine Verbindung von zwei hahnlosen Quecksilberpumpen nach der von mir im Jahre 1878 in diesen Annalen beschriebenen Construction (unter Benutzung einer von Toepler her-

rührenden Einrichtung¹⁾ mit einer doppelt wirkenden kleinen Saug- und Druckpumpe, wie solche bei Glasmodellen für Feuerspritzen verwandt wird.

In Taf. III Fig. 10 findet sich diese Einrichtung schematisch dargestellt. A und A_1 sind zwei Glaskugeln analog den Quecksilberbehältern bei der gewöhnlichen Geissler'schen Quecksilberpumpe. Dieselben endigen in zwei Glasröhren H und H_1 , durch welche das Quecksilber ein- resp. austritt. Seitlich an H und H_1 sind die engen Glasröhren C und C_1 angesetzt, welche etwa 800 mm in die Höhe gehen, sich oben vereinigen und in die Röhre F auslaufen, die zu dem evacuierenden Apparate führt. Letzterer kann mittelst Schliffstück angesetzt oder angeschmolzen werden. Manometerprobe und Trockengefäss sind wie üblich einzuschalten.

Die Glasröhren H und H_1 führen zu einer Stahlplatte a , in welche dieselben mit feinstem Siegelack eingekittet werden. Der Platte a gegenüber und von derselben durch eine dritte gegen die beiden Platten a und c abgeschliffene drehbare Platte b getrennt, steht fest eine Stahlplatte c . a , b und c sind durch eine Schraube angezogen. In die Platte c sind wieder zwei Glasröhren J und J_1 eingekittet, welche zu den liegenden Glasröhren M und N führen. Letztere sind, wie es die Figur zeigt, an zwei Glaszylinder M und M_1 angeschmolzen. In den Röhren M und N befinden sich die vier Glasventile e , e_1 , f und f_1 , von welchen sich f und f_1 nach den Cylindern O und O_1 hin öffnen, während e und e_1 sich umgekehrt nach der Röhre M hin öffnen. In den Glaszylindern O und O_1 sind zwei Kolben B und B_1 entgegengesetzt beweglich, sodass B niedergeht, während B_1 aufwärts geht.

Die Glaskugeln A und A_1 haben weiter an ihren oberen Enden die von Toepler angegebene Einrichtung, den Abschluss gegen die äussere Luft selbstthätig zu bewirken. Zu diesem Zwecke enden dieselben oben in nach unten umge-

1) Es ist mir erst nach Einsendung dieser Arbeit durch den Aufsatz des Hrn. E. Wiedemann (Wied. Ann. 10. p. 202. 1880) bekannt geworden, dass die Grundidee zu dieser hahnlosen Pumpe schon von Toepler im Jahre 1862 angegeben worden ist (Dingler Journ. 163.)

bogene enge Röhren D und D_1 von 770—780 mm Länge. Diese Röhren haben den wieder nach oben gebogenen weiteren Ansatz E , resp. E_1 .

Die oben erwähnte mittlere Scheibe b hat die in Taf. III Fig. 11 gezeichnete Einrichtung. Es befinden sich in derselben die beiden gezeichneten Canäle, von denen jeder etwa einen Winkel von 120° umspannt. α und α_1 bedeuten die Röhrenmündungen H und H_1 in der Scheibe a ; γ und γ' die der Röhren J und J_1 in der Scheibe c . Bei der gezeichneten Stellung steht H mit J und H_1 mit J_1 in Verbindung. Wird die Scheibe c um 90° gedreht, so tritt H in Verbindung mit J_1 und H_1 mit J . Man sieht, dass die Figur 10 Taf. III die erste Verbindung nur schematisch wiedergibt.

Der Apparat wird, soweit wie es die Schraffirung anzeigt, mit Quecksilber gefüllt; die Füllung kann durch Herausnahme der Kolben B und B_1 geschehen.

Das Spiel der Pumpe ist nun folgendes: Wir denken uns die Verbindungen hergestellt so wie es die Figur veranschaulicht. Es werde dann B in die Höhe gezogen, B_1 niedergedrückt. Der Quecksilberdruck in H_1 drückt das Ventil f herauf; Quecksilber geht aus A_1 nach O über. Durch das Niederdrücken von B_1 wird das in O_1 befindliche Quecksilber durch das sich öffnende Ventil e_1 nach J und weiter in A hinein getrieben. Die Ventile e und f_1 sind geschlossen. Wird nun B niedergedrückt und B_1 emporgezogen, so öffnen sich die Ventile e und f_1 , während e_1 und f sich schliessen. Quecksilber steigt aus O in A hinein und wird von O_1 aus A_1 herausgesaugt. In dieser Weise füllt sich A allmählich, während A_1 evacuirt wird. Der Abschluss der Kugel A_1 gegen die äussere Luft bewirkt selbstthätig das aus E_1 vermöge des äussern Luftdrucks in D_1 hineinsteigende Quecksilber. Die Verbindung der Kugel A_1 mit dem zu evacuierenden Gefässe wird durch die Glasröhre C_1 hergestellt. Ist das Quecksilber unter die Mündung der Verbindungsröhre G_1 gesunken, so geht die Luft aus dem zu evacuierenden Gefässe in den oberen Theil von A_1 . Die Hinzufügung der Verbindungsröhre G_1 ist nothwendig, um ein heftiges Stossen der aufsteigenden Luft zu vermeiden.

Der Abschluss der Kugel A , in welche Quecksilber hineingedrängt wird, erfolgt wieder selbstthätig durch das in C eindringende Quecksilber. Die aus A verdrängte Luft tritt durch die enge Röhre D in die äussere Luft.

Ist auf diese Weise A gefüllt und A_1 von Quecksilber leer, so dreht man die Scheibe c um 90° . Dann tauschen die beiden Kugeln A und A_1 ihre Rollen.

Die Verbindung der beiden Glaskugeln A und A_1 durch C und C_1 hat noch den Vortheil, dass dadurch ein Uebersteigen des Quecksilbers in den zu evacuierenden Apparat unmöglich gemacht wird. Sollte etwa in A der Druck zu stark werden, so fliesst das Quecksilber durch C und C_1 nach A_1 zurück.

In betreff von Einzelheiten ist noch zu erwähnen, dass das Spiel der Glasventile sehr sicher erfolgt, wie ich mich bei der im Jahre 1878 angegebenen Construction, bei welcher an Stelle der von Toepler angegebenen Röhre D , ebenfalls Ventile sich befanden, überzeugt habe. Um weiter das Quecksilber nicht mit den von den Kolben B und B_1 berührten Cylinderwänden in Berührung treten zu lassen, werden die Kolben B und B_1 nicht ganz bis auf den Boden von O , resp. O_1 niedergedrückt. Der Gang der Kolben wird so geregelt, dass von der gezeichneten symmetrischen Stellung aus der sich nach oben bewegende Kolben in gleicher Zeit einen zwei- bis dreimal grösseren Weg zurücklegt wie der niedergehende Kolben. Diese Regelung hat mechanisch keine Schwierigkeit. Ich bemerke weiter, dass die Kolben B und B_1 nicht so luftdicht zu schliessen brauchen, wie in einer gewöhnlichen Luftpumpe, da sie nur möglich machen sollen, Verdichtungen oder Verdünnungen hervorzurufen.

Für die Scheiben a , b und c schlage ich Stahl vor, weil durchbohrte Glasscheiben beim Abschleifen gar zu leicht springen. Die Dichtung zwischen diesen Scheiben braucht im wesentlichen nur Quecksilberdicht zu sein, aus welchem Grunde bei gut abgeschliffenen Scheiben Fett nicht verwandt zu werden braucht.

Da ich augenblicklich keine Gelegenheit habe, eine derartige Pumpe herstellen zu lassen, kann ich über praktische

Ergebnisse, sowie über die genauen Herstellungskosten nichts mittheilen. Ich erwähne in betreff des letztern Punktes, dass Herr Glasbläser Müller hier, Kronenstrasse, den Glas- theil, der die Hauptsache bildet (ohne Manometerprobe und Trockengefäss) auf 60 Mark veranschlagt hat.

Berlin, 12. Juni 1880.

XV. *Abänderung des Absorptionshygrometers nach Rüdorff; von F. Neesen.*

Hr. Rüdorff hat in den Berichten der Berliner chemischen Gesellschaft 1880, p. 149 ein Absorptionshygrometer beschrieben, dem ich folgende, wie ich glaube, in einigen Punkten zweckmässigere Form gegeben habe.

A und A_1 (Taf. III Fig. 11) sind zwei gewöhnliche Kochflaschen, an deren Hälse Schliffstücke angeschmolzen sind. In diese passen hinein die kurzen Glasröhren D und D_1 mit a) oben einem zweiten Schliffstück C und C_1 , b) den seitlichen, mit Hahn versehenen Röhren E und E_1 und c) den seitlichen, wie Figur zeigt, umgebogenen Röhren F und F_1 . In die Schliffstücke C und C_1 passen die Glasröhrenfortsätze G und G_1 der Hahnbüretten B und B_1 . G und G_1 ragen etwas aus dem Ende der Röhrenstücke D und D_1 heraus. Die beiden Apparate sind verbunden durch eine (etwa 4 mm im Durchmesser) Glasröhre H , die mit F und F_1 durch kurze Kautschukschläuche J und J_1 befestigt ist. In H befindet sich ein Index von Oel, zweckmässig nicht zu kurz, etwa 7—8 cm lang.

Vor dem Versuche werden zunächst A und A_1 durch Erwärmen und Hindurchblasen von Luft ausgetrocknet. Ebenso wird sorgfältig nachgesehen, ob sich in den einzusetzenden Glasstücken D , G etc. Feuchtigkeit oder, etwa von früheren Versuchen herrührend, Schwefelsäure befindet. Auch diese Stücke werden gereinigt. Ich komme später auf die Reinigung von G noch zurück. Die Luft, welche auf

ihren Feuchtigkeitsgehalt zu untersuchen ist, wird in A und A_1 hineingeblasen und darauf das Glasstück D sowie die Bürette B eingesetzt; ebenso D_1 und B_1 . Die Hähne C und C_1 werden nun geschlossen, dann wird gewartet, ob der Oelindex in H ungeändert bleibt, eventuell kann man durch C und C_1 neue Luft zulassen. Man füllt jetzt zunächst die eine Bürette B mit concentrirter Schwefelsäure und lässt so viel von derselben herausfliessen, bis der Index die frühere Stelle wieder eingenommen hat. Die Bewegung des Oeltropfens ist folgende: im ersten Momente bewegt er sich nach A_1 hin, dann wird der Wasserdampf absorbirt von der einflussenden Schwefelsäure, der Index bewegt sich rasch nach A ; bei stärkerem Einfließen der Schwefelsäure bleibt er etwas stehen, und die Stellung des Hahnes an B wird nun so regulirt, dass der Index stets ziemlich an der alten Stelle bleibt. Nach etwa zwei Minuten war die Hauptmenge des Dampfes in meinem Apparate absorbirt, ich überlasse nun den Apparat bei geschlossenem Hahne an B sich selbst; es wird nachträglich noch etwas Dampf absorbirt, und infolge dessen der Index sich langsam nach B bewegen. Von Zeit zu Zeit wird wieder Schwefelsäure eingelassen, bis schliesslich nach 10–15 Minuten der constante Stand des Index zeigt, dass aller Dampf absorbirt ist. Nun wird Schwefelsäure in B_1 eingefüllt und sofort ein zweiter Controlversuch mit dem Apparate A_1 etc. vorgenommen.

Die Punkte, wegen deren diese Construction mir vor der ursprünglichen von Rüdorff vorzuziehen zu sein scheint, sind folgende: Erstens, und das ist der wichtigste Punkt, ist man von Temperaturschwankungen unabhängig, da solche die Luft in beiden Kolben treffen, ihre Wirkung auf den Index sich also aufheben muss. Bei dem Apparate von Rüdorff kann die Genauigkeit durch eine Aenderung der Temperatur beeinträchtigt werden, und eine solche Temperaturänderung ist bei der wohl immer vorhandenen anfänglichen Differenz der Temperaturen des Glases und der eingeschlossenen Luft gewiss kaum zu vermeiden, namentlich, da der Versuch, wie gesagt, eine ziemliche Zeit in Anspruch nimmt. Zweitens ist der ganze Apparat sehr bequem zu reinigen. Durch die

Anwendbarkeit der Erhitzung geschieht die Trocknung ohne Anwendung von Aether sehr rasch. Beide Kolben habe ich stets in etwa fünf Minuten getrocknet. Drittens ist die Genauigkeit der Ablesung durch horizontale Verschiebung des Index gewiss genauer wie bei dem von Rüdorff angewandten Manometer. Mir hat bisher Oel stets gute Dienste gethan, sodass ich die Anwendung der von Rüdorff empfohlenen Mischung von Schwefelsäure und Wasser, die weder absorbiert, noch Dampf abgibt, nicht für nöthig halte. Viertens hat man sofort einen Controlversuch. Und schliesslich wäre auch wohl zu erwähnen, dass die Kosten dieses Doppelapparates noch etwas geringer sind wie die des einfachen von Rüdorff. Herr Glasbläser Müller, Berlin, Kronenstrasse, hat meinen Apparat für 28 Mark angefertigt, den von Rüdorff für 36 Mark.

In betreff des Gebrauchs füge ich noch einige Einzelheiten hinzu. Ich habe gefunden, dass sich an diejenigen Wände der Kolben, welche nicht erhitzt werden können (nahe am Schliffstück), leicht Feuchtigkeit ansetzt, welche auch beim Hindurchblasen von heisser Luft haften bleibt. Dieselbe würde natürlich das Resultat stören, daher trockne ich, so weit ich kann, die Kolben noch mit Fliesspapier aus. Einen sehr grossen Einfluss hat etwa zurückgebliebene Schwefelsäure in *G*. Daher wird dieselbe sehr sorgfältig entfernt. An einem Drahte befestigte ich ein Schwämmchen oder Fliesspapier, feuchte dasselbe an und spüle damit zunächst *G* und *G*₁ aus. Darauf werden beide Röhren in ähnlicher Weise getrocknet. Damit nicht etwa während des Versuchs mit *B* Schwefelsäure in *B*₁, resp. *G*₁ sich hineindrängt durch den vielleicht nicht ganz dichten Hahn, fülle ich jede einzelne Bürette erst direct vor dem Gebrauche derselben. Hähne, die sonst sehr gut aussahen, lassen nämlich unter dem Drucke der über ihr stehenden Säule von Schwefelsäure Spuren der letztern durch. Damit keine Schwefelsäure mit dem Fette der Schliffstücke in Berührung, und damit überhaupt in das Glasstück *D* keine Schwefelsäure eindringt, ist *G* etwas länger wie das untere Ende von *D*. Man könnte das Schliffstück *C* auch vermeiden,

indem man B mit D zusammenschmilzt. Da sich dann aber in G bei C eine kleine Erweiterung bildet, so ist die Reinigung von G nicht so gut vorzunehmen.

Zum Schlusse gebe ich einige Bestimmungen. Das Volumen A war 859 ccm, das von A_1 824 ccm (die Volumina von D etc. eingeschlossen).

Bei der ersten Beobachtung (während eines heftigen Regens) wurden aus B ausgelassen 12,1 ccm Schwefelsäure, aus B_1 auch 12,1 ccm. Bei dem folgenden Versuche (es hatte sich aufgeklärt, und das Haarhygrometer zeigte weniger Feuchtigkeit an) gab B 11,85 ccm; B_1 konnte wegen eines Versehens nicht beobachtet werden. Bei einem dritten darauf folgenden Versuche (das Haarhygrometer zeigte weitere Abnahme des Feuchtigkeitsgehaltes) gab B 11,6 ccm. Indessen war dieses etwas zu viel, da der Index schliesslich etwas zu weit nach A_1 hin stand. B_1 gab dann, nachdem durch Luftaustritt der Index wieder in die richtige Lage gebracht war, 11,4 ccm. Die Temperatur betrug 22°C .

Berlin, 12. Juni 1880.

**XVI. Erwiderung auf die Notiz des Herrn
O. E. Meyer: „Ueber eine veränderte Form“ etc.¹⁾;
von Ludwig Boltzmann in Graz.**

Meine ursprüngliche Behauptung²⁾ ging dahin, dass Hr. Meyer das Problem, welches er sich in seinem Buche: „Die kinetische Theorie der Gase“, pag. 259 stellte, daselbst vollkommen unrichtig aufgelöst hat. Die im Titel citirte letzte Notiz gibt dies indirect insofern zu, als sich Hr. Meyer daselbst ein vollkommen anderes Problem stellt. In allen Punkten, auf welche sich meine Einwürfe bezogen, wird das Problem jetzt geändert.

1) Anstatt der Wahrscheinlichkeit, „dass unter den herausge-

1) O. E. Meyer, Wied. Ann. **10**. p. 296. 1880.

2) Boltzmann, Wien. Ber. **76**. 2. Abth. Oct. 1877.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. **XI**.

griffenen Theilchen die Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 , dann u_2, v_2, w_2 , ferner u_3, v_3, w_3 u. s. f., endlich u_N, v_N, w_N , vertreten sein“¹⁾ (welche ich als die Wahrscheinlichkeit mit willkürlicher Reihenfolge bezeichnen will), sucht er vielmehr jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass das erste der herausgegriffenen Theilchen die Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 , das zweite u_2, v_2, w_2 u. s. w. besitzt (Wahrscheinlichkeit mit gegebener Reihenfolge) und findet dafür natürlich den richtigen Werth:

$$(1) \quad P = F(u_1, v_1, w_1) \cdot F(u_2, v_2, w_2) \dots F(u_N, v_N, w_N).$$

Warum aber beim Beweise des Maxwell'schen Gesetzes gerade die Wahrscheinlichkeit bei gegebener, nicht vielmehr die bei willkürlicher Reihenfolge gesucht werden müsse, dafür hat er keinen andern Grund, als den, dass man nur im ersten Falle zur gewünschten Formel gelangt.

2) Die Gleichungen der Bewegung des Schwerpunkts und der lebendigen Kraft fasste er früher als Bedingungsgleichungen auf, denen die Werthe der Variabeln sowohl für den gesuchten Maximumwerth, als auch für die übrigen kleineren Werthe, die mit dem Maximumwerthe verglichen werden, genügen müssen;²⁾ ich will solche Bedingungsgleichungen künftig immer als Bedingungsgleichungen im gewöhnlichen Sinne der Maximalrechnung bezeichnen. Da ich aber nachwies, dass in diesem Falle gar kein Maximum existirt, so legt er jetzt diesen Gleichungen eine ganz andere Bedeutung bei; sie sollen bloß für den Maximumwerth gelten, nicht aber für die damit verglichenen kleineren Werthe. Von Bedingungsgleichungen im oben definirten gewöhnlichen Sinne der Maximalrechnung ist also jetzt nirgends mehr eine Rede.

3) Er fordert von dem gesuchten Werthe keineswegs, dass er ein wirkliches Maximum sei, sondern bloß, dass er abnehme, wenn man allen Geschwindigkeitscomponenten in

1) Wörtlich nach Meyer Buch, p. 262.

2) P. 261 seines Buches sagt er wörtlich: Dieselben Gleichungen gelten mit den gleichen Werthen der vier Constanten, ebenso wie für den gesuchten wahrscheinlichsten, auch für jeden andern möglichen Zustand der Bewegung, bei welchem jedes Theilchen veränderte Werthe der Geschwindigkeiten besitzt.

der Richtung der x -Axe gleichzeitig einen gleichen und gleichbezeichneten Zuwachs ertheilt, und dass derselbe auch für die y - und z -Axe gelte. Von der gefundenen Grösse:

$$(2) \quad P = C^N \cdot e^{-km \sum [(u_n - a)^2 + (v_n - b)^2 + (w_n - c)^2]}$$

beweist er auf p. 302 der im Titel citirten letzten Notiz wieder blos, dass sie diese Eigenschaft¹⁾ besitzt. Wenn er auch wieder ab und zu behauptet (p. 297, 1. und 2. Zeile und p. 302 der letzten Notiz), bewiesen zu haben, dass sie ein Maximum sei, so überzeugt man sich doch leicht vom Gegentheile. Man braucht da blos irgend einem der u einen mit solchen Vorzeichen versehenen Zuwachs zu ertheilen, dass der Zahlenwerth von $u - a$ abnimmt, während alle anderen u , v und w unverändert bleiben. Dadurch und noch in der mannigfaltigsten Weise kann sogleich der durch

1) Nicht unerwähnt kann ich lassen, dass der von Hrn. Meyer gefundene, hier im Texte mit 2) bezeichnete Ausdruck diese Eigenschaft nicht blos, wie Hr. Meyer behauptet, besitzt, wenn die Variablen den vier Bedingungsgleichungen $0 = \sum (u_n - a)$, $0 = \sum (v_n - b)$, $0 = \sum (w_n - c)$ $0 = \sum \left[\frac{m}{2} (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2) - E \right]$ genügen, sondern auch ebenso gut,

wenn sie blos den drei ersten dieser Gleichungen, aber nicht der letzten genügen. Da aber gerade die letzte Gleichung die der Energie ist, so findet die von Hrn. Meyer geforderte Eigenschaft nicht blos statt, wenn in dem herausgegriffenen Theile des Gases derselbe mittlere Zustand der Bewegung und Energie, wie in der gesamten Gasmasse besteht, sondern auch wenn ein ganz anderer Zustand der Energie (andere mittlere lebendige Kraft eines Theilchens) herrscht, sobald nur die mittlere Geschwindigkeit in den drei Coordinateneinrichtungen dieselbe ist. In der That setzt Hr. Meyer auf p. 300 seiner letzten Notiz die Coëfficienten A, B, \dots nachher gleich Null, benutzt also die Gleichung der Energie gar nicht, sowie auch die Schlussformel den Werth von E gar nicht enthält.

Auch Hrn. Meyer's Schluss auf p. 301 der letzten Notiz, dass $l = 0$ sein müsse, weil der Ausdruck $-km [(u - a)^2 + (v - b)^2 + (w - c)^2] - lm [(u - a)(v - b) + (v - b)(w - c) + (w - c)(u - a)]$ für alle reellen Werthe von $u - a$, $v - b$, $w - c$ negativ sein muss, ist falsch. Nach den wohlbekannten Regeln, die z. B. auch bei Beantwortung der Frage in Anwendung kommen, welche Flächengattung eine Gleichung 2. Grades darstellt, folgt hieraus nicht $l = 0$, sondern blos, dass l zwischen $-k$ und $+2k$ liegt. Doch lege ich hierauf kein Gewicht, da man das Verschwinden von l leicht auf andere Art beweisen könnte.

die Gleichung (2) gegebene Werth der Grösse P noch weiter vergrössert werden. Da also die Grösse P noch keineswegs ein Maximum ist, so ist schwer einzusehen, welche Bedeutung die von Hrn. Meyer bewiesene Eigenschaft derselben für den Beweis des Maxwell'schen Gesetzes haben soll.

Wenn die Variabeln $u_1, v_1 \dots w_N$ gar keinen Bedingungsgleichungen im gewöhnlichen Sinne der Maximalrechnung unterworfen sind, wie dies bei Hrn. Meyer jetzt der Fall ist (die von ihm beliebte Aenderung, dass er alle u um dieselbe Grösse wachsen lässt, verletzt ja ebenfalls die Gleichung $\Sigma (u_n - a) = 0$ und die Gleichung der lebendigen Kraft), so hat vielmehr der durch die Gleichung (2) gegebene Werth von P offenbar sein Maximum, wenn sämmtliche u gleich a , sämmtliche v gleich b , sämmtlich w gleich c sind, weil dann jeder Factor des Productes (1) seinen grössten Werth hat.

Von dem von Hrn. Meyer auf p. 296 als dem Kernpunkt des Streites bezeichnetem Probleme lässt sich nun Folgendes sagen. Sei eine sehr grosse Zahl M von Theilchen gegeben, zwischen denen eine ganz beliebige Zustandsvertheilung Z besteht. Aus ihnen werde eine kleinere Anzahl N von Theilchen willkürlich herausgegriffen. Bestimmt man die Wahrscheinlichkeit ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, so wird es immer am wahrscheinlichsten sein, dass unter den N -Theilchen wieder dieselbe Zustandsvertheilung wie unter den M besteht, dass also auch mittlere lebendige Kraft, Bewegungsgrösse nach einer Richtung etc. für die N -Theilchen denselben Werth, wie für die M -Theilchen haben. Dies ist richtig, wenn die Zustandsvertheilung Z mit dem Maxwell'schen Gesetze identisch ist; bleibt aber ebenso richtig, wenn die Zustandsvertheilung Z irgend eine andere ist,¹⁾ sodass hieraus kein Schluss auf die Richtigkeit des Maxwell'schen Gesetzes möglich ist. Bei Wahrscheinlichkeitsbestimmung mit Rücksicht auf die Reihenfolge dagegen gilt dies weder für die Maxwell'sche noch für irgend eine andere Zustands-

1) Wenn die Zustandsvertheilung Z darin bestand, dass alle M -Theilchen dieselbe Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung besitzen, so ist sogar die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen den N -Theilchen dieselbe Zustandsvertheilung besteht, gleich eins.

vertheilung. In diesem Falle ist vielmehr die Wahrscheinlichkeit am grössten, dass sämtliche Factoren des Productes (1) ihren grössten Werth haben, also dass jedes der N -Moleculé dieselbe Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung (die wahrscheinlichste) hat. Da ich den ersteren Satz schon früher bewiesen habe,¹⁾ der letztere aber unmittelbar klar ist, will ich hier keine Rechnungen, sondern ein erläuterndes Beispiel geben.

Setzen wir an die Stelle der M -Theilchen eine Urne mit 100 weissen, 200 rothen und 300 schwarzen Kugeln. Aus dieser Urne sollen 6 Kugeln gezogen werden, welche den N -Theilchen entsprechen. Bestimmt man die Wahrscheinlichkeit ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, so ist es offenbar am wahrscheinlichsten, dass unter den gezogenen Kugeln eine weisse, 2 rothe und 3 schwarze sich befinden, dass also unter ihnen dieselbe Farbenvertheilung, wie in der Urne herrsche. Es ist dies z. B. viel wahrscheinlicher, als dass man lauter schwarze Kugeln gezogen habe. Bestimmt man dagegen die Wahrscheinlichkeit mit Rücksicht auf die Reihenfolge, so ist es am wahrscheinlichsten, dass jede der gezogenen Kugeln eine schwarze sei, d. h. es ist dies wahrscheinlicher, als dass z. B. die erste weiss, die beiden darauf gezogenen roth und die 3 zuletzt gezogenen schwarz seien. Ebenso ist der Zug von 6 schwarzen Kugeln wahrscheinlicher, als dass auf den ersten und letzten Zug eine rothe, auf den dritten eine weisse und auf die übrigen Züge eine schwarze Kugel getroffen wurde u. s. w. Würde man also die Wahrscheinlichkeit mit Rücksicht auf die Reihenfolge bestimmen, so würde das Product P blos dadurch zu einem Maximum gemacht werden können, dass schon unter den M -Theilchen alle die mittlere Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung oder möglichst wenige verschiedene Geschwindigkeitsrichtungen hätten. Denn im ersten Falle hätten im Ausdrücke (1) alle F den Werth eins; es wäre also auch $P = 1$.

1) Boltzmann, Wien. Ber. 78. 2. Abth. Juni 1878, wo übrigens statt $\frac{n}{N}$ überall einfach n stehen soll.

Ich glaube hiermit bewiesen zu haben, dass die Lösung des neuen Problems, welches Hr. Meyer in seiner letzten Notiz sich stellt, durchaus keinen Beweis des Maxwell'schen Gesetzes enthält; ja sowohl die Art der Wahrscheinlichkeitsbestimmung, als auch sämtliche übrigen Veränderungen, welche er vornimmt, scheinen mir ein bedeutender Rückschritt zu sein.

**XVII. Bemerkungen zu dem Aufsätze des
Hrn. U. Dühring: „Zum Schutze des Gesetzes der
correspondirenden Siedetemperaturen“;
von A. Winkelmann.**

Hr. Dühring¹⁾ hat kürzlich in einem Aufsätze mit dem obigen Titel das von ihm aufgestellte Gesetz der correspondirenden Siedetemperaturen gegen die von mir gemachten Einwendungen zu vertheidigen gesucht und gleichzeitig meine Arbeit einer Kritik unterzogen. Hätte Hr. Dühring sich auf eine Vertheidigung seines Gesetzes beschränkt, so läge für mich keine Veranlassung vor, etwas zu erwidern; denn die Vertheidigung hat meine Einwendungen nicht zu erschüttern vermocht. Hr. Dühring hatte nämlich auf p. 79 und 80 des Werkes seines Vaters²⁾ für 4 Flüssigkeiten: Alkohol, Aether, Schwefelkohlenstoff und Aethyljodid, eine Zusammenstellung der beobachteten und der nach seinem Gesetze berechneten Werthe gegeben und über das Resultat dieser Zusammenstellung gesagt: „Die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Temperaturen sind, wie die Tabellen zeigen, äusserst geringfügig. Nur bei den niedrigsten Drucken werden für Alkohol und Aether die Unterschiede beachtenswerth, erklären sich aber sehr leicht aus der beträchtlichen Wirkung, die bekanntlich schon die geringste fremde Beimischung bei diesen Substanzen auf die niederen Dampfspannungen hervorbringt.“

1) U. Dühring, Wied. Ann. 11. p. 163. 1880.

2) E. Dühring, Neue Grundgesetze zur ration. Physik u. Chemie. 1878.

Nach diesen Bemerkungen hatte ich erwartet, dass eine Fortsetzung der Tabelle von Hrn. Dühring für höhere Drucke sehr gut mit den Beobachtungen übereinstimmende Werthe geben würde; statt dessen fand sich aber das gerade Gegentheil. Wie ich schon damals zeigte, wächst die Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung bei Aether und Schwefelkohlenstoff mit wachsendem Drucke ganz beträchtlich und erreicht bei 10 Atmosphärendruck den Werth von $4,11^{\circ}$, resp. $4,55^{\circ}$. Einer Temperaturänderung von dieser Grösse entspricht bei diesem Drucke eine Druckänderung von etwa 0,8 Atmosphären. Ob — wie jetzt Hr. Dühring in seinem Aufsätze meint — diese Differenzen innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Experimental- und Beobachtungsfehler liegen, überlasse ich dem Urtheile der Leser, denen sogleich Gelegenheit gegeben wird, sich eine Ansicht über das Urtheil des Hrn. Dühring in den fraglichen Dingen zu bilden.

Hr. Dühring bespricht die von mir aufgestellte Beziehung und behauptet zweierlei:

1) Dass dieselbe in ihrer einfachsten Form, ohne Rücksicht auf die Dichte, mit einer von ihm abgeleiteten Gleichung übereinstimme, und dass ich dabei den Werth (-100°) für die „Verdampfungsgrenze“ des Wassers von ihm entlehnt habe;

2) Dass dieselbe in der erweiterten Form falsch sei.

Um den ersten Theil seiner Behauptung zu beweisen, zeigt Hr. Dühring zunächst, dass aus seiner Gleichung:

$$\frac{p'}{p} = \left(\frac{s'}{s}\right)^y,$$

meine Gleichung:

$$t_n = 200 \cdot n^{\log b} - 100$$

hervorgeht, wenn er:

$$y = \frac{1}{\log b}$$

setzt. Nun ist b eine constante Grösse, folglich müsste auch y eine solche sein, sollte die Gleichsetzung des Hrn. Dühring berechtigt sein. Ueber y drückt sich nun Hr.

Dühring auf p. 92 des Werkes folgendermassen aus: „Nennen wir der Kürze wegen die von den Verdampfungsgrenzen gezählten Temperaturen s' und s , so können wir $\frac{p'}{p} = \left(\frac{s'}{s}\right)^y$ setzen, wobei y sich mit p und p' verändert, aber für alle Substanzen immer dasselbe ist. Verfolgt man den Gang von y näher, so zeigt sich an den Quecksilberdämpfen, dass es für sehr niedrige Spannungen, etwa zwischen $\frac{1}{30}$ und $\frac{1}{10}$ mm, fast genau 2 bleibt, sodass also hier die Dampfspannungen wie die Quadrate der von der Verdampfungsgrenze gezählten Temperaturen wachsen.“

Nach diesem Ausspruche des Hrn. Dühring ist y eine Function von den Drucken p und p' , wird aber innerhalb der Drucke $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{10}$ mm fast constant. Fast sollte man glauben, es handle sich bei diesen Angaben um einen Druckfehler; denn man kann sich nicht vorstellen, dass jemand aus dem Intervall $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{10}$ mm irgend eine Eigenschaft einer unbekannten Function abzuleiten ernstlich die Absicht hat. Bei Hrn. Dühring ist aber die Annahme eines solchen Fehlers ganz zweifellos ausgeschlossen; denn in einer andern Wendung wird die Constanz von y für das Intervall von 0° bis etwa 50° angegeben, und nach Regnault's Formel hat bei 50° das Quecksilber den Druck von 0,112 mm. Bekanntlich bildet etwa 0,1 mm die Genauigkeitsgrenze bei Druckbestimmungen, und daher macht es einen merkwürdigen Eindruck, wenn man Grössen, die 0,1 mm nicht überschreiten, eine solche Bedeutung beilegt, dass daraus Gesetze ableitbar seien. Zum Ueberfluss erwähne ich noch, dass Regnault nur 4 Beobachtungen innerhalb des gedachten Intervalls über den Druck der Quecksilberdämpfe gemacht hat, und zwar folgende:

I. Reihe.		II. Reihe.	
Temperatur	Druck	Temperatur	Druck
23,57	$\frac{\text{mm}}{0,068}$	25,39	$\frac{\text{mm}}{0,034}$
38,01	0,098	49,15	0,087

Ausserdem bemerkt Regnault, dass der Druck des Dampfes bei 0° nicht messbar gewesen sei.

Wie man sieht, ist in der ersten der obigen Reihen

der Druck bei einer tiefern Temperatur doppelt so gross, als in der zweiten Reihe bei einer höhern Temperatur, so dass beide Reihen im Verhältniss zum Gesamtdruck sehr verschiedene Resultate liefern.

Bei seiner Formelbestimmung nimmt Regnault für den Druck des Dampfes bei 0° den Werth 0,02 mm an, weil derselbe nicht 0 sein könne, da das Quecksilber auch bei 0° noch verdampft. Ueber diesen Werth 0,02 mm sagt aber Regnault: „La première de ces valeurs de F est hypothétique; elle est trop petite, pour pouvoir être appréciée avec quelque certitude.“

Man wird es daher erklärlich finden, dass ich der von Hrn. Dühring angegebenen Constanz des Werthes y innerhalb der Druckgrenzen $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{10}$ mm eine Bedeutung nicht beigelegt, vielmehr ganz allgemein y als das angesehen habe, was es nach Hrn. Dühring bei Drucken ist, die grösser als $\frac{1}{10}$ mm sind, nämlich als eine Function der Drucke p und p' .¹⁾ Sobald aber y eine Function des Druckes ist, ist die behauptete Identität der Gleichungen nicht vorhanden. Zudem kommt noch, dass das Wasser, um welches es sich bei meiner Arbeit handelte, nur bis zu dem Drucke von 0,27 mm durch Regnault untersucht wurde, also die von Hrn. Dühring hingestellte Eigenschaft gar nicht in Betracht kommt; ferner ist der Werth von y nach Hrn. Dühring nahezu = 2, so lange er constant ist, während nach der obigen Gleichung:

$$y = \frac{1}{\log b}$$

aus dem von mir aufgestellten Werthe von b für y der Werth 7,36 resultiren würde.

In Betreff der „Verdampfungsgrenze“ des Wassers sagt Hr. Dühring: „Auch wird Hr. Winkelmann für jene

1) Da y eine nicht näher bestimmte Function ist, so ist Hr. Dühring natürlich im Stande, aus seiner Formel durch eine passende Bestimmung von y jede etwa noch aufzufindende Beziehung zwischen Druck und Temperatur abzuleiten. Setzt aber Hr. Dühring y gleich einer Constanten, so verliert y auch noch den einzigen Charakter, den es durch Hrn. Dühring in dem genannten Werke erhalten hat, nämlich den Charakter einer Function.

– 100°, die er ganz willkürlich in seiner Formel auftreten lässt, und die auch in der von mir für alle Substanzen vorgestellten Formel bei der stillschweigenden Winkelmann'schen Exemplificirung derselben auf das Wasser wesentlich sind, keine Herkunft, sei es aus der Literatur, sei es aus eigenem Raisonnement, nachweisen können.“ Es ist mir leicht, die Unrichtigkeit dieser kühnen Behauptung darzulegen, eine Darlegung, welche zugleich zeigt, wie ich zu der einfachsten Form meiner Gleichung gelangt bin.

Ich habe zunächst eine geometrische Reihe der Drucke des gesättigten Wasserdampfes und die dazu gehörigen Temperaturen aufgestellt und die Frage zu beantworten gesucht, in welcher einfachen Beziehung stehen dieselben. Die Annahme, dass die Temperaturen in obigem Falle in arithmetischer Progression zunahmen, wurde von August zu einer Formelconstruction verwerthet; ich erwähne dies in der Absicht, um zu zeigen, dass die Zusammenstellung von Drucken, welche nach einer geometrischen Reihe wachsen, nichts neues ist. Nach verschiedenen Bemühungen kam ich auf den Gedanken, zu untersuchen, ob die Temperaturen nicht ebenso wie die Drucke eine geometrische Reihe darstellen, und da dies direct nicht der Fall, ob dasselbe nicht durch Addition einer constanten Grösse zu jeder Temperatur erreichbar. Da ich ferner von der Ansicht ausging, dass die Dichte des Dampfes einen Einfluss auf die Beziehung von Druck und Temperatur ausüben müsse, so hoffte ich am leichtesten zu einem Resultat zu gelangen, wenn ich zunächst nur die Drucke unterhalb einer Atmosphäre berücksichtigte, da die Dichte hier verhältnissmässig geringe Aenderungen erleidet. Sind daher:

$$t_1, \quad t_{\frac{1}{2}}, \quad t_{\frac{1}{4}}, \quad t_{\frac{1}{8}} \dots$$

die Temperaturen, welche den Drucken von 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ Atmosphäre entsprechen, so war die Frage zu beantworten, für welchen Werth von x werden die Werthe von:

$$\frac{t_1 + x}{t_{\frac{1}{2}} + x}, \quad \frac{t_{\frac{1}{2}} + x}{t_{\frac{1}{4}} + x}, \quad \frac{t_{\frac{1}{4}} + x}{t_{\frac{1}{8}} + x}, \dots$$

constant. Durch diese Untersuchung kam ich sehr bald zu dem Werthe von $x = 100$, indem ich davon absah, noch Bruchtheile hinzuzufügen oder abzuziehen; das ist also die Herkunft von -100° . Uebrigens habe ich schon in meiner damaligen Arbeit gesagt:

„Würde man beim Wasserdampf von einer andern Temperatur als -100° ausgehen, so würden die Verhältnisszahlen sich ändern, eine nennenswerthe grössere Uebereinstimmung derselben liesse sich aber nicht erzielen. Ich habe aber auch Werth darauf gelegt, diese Ausgangstemperatur so zu bestimmen, dass die Verhältnisszahlen in dem niedrigen Drucke unterhalb einer Atmosphäre möglichst übereinstimmen, weil ich glaube, dass das Gesetz gerade bei diesen kleinen Drucken seinen vollkommensten Ausdruck finden muss.“ Sobald man die eben angeführten Ausdrücke constant setzt, erhält man die von mir aufgestellte Formel, wie aus meiner frühern Arbeit hervorgeht.

Aus der obigen Darstellung wird man erkennen, dass sowohl meine ursprüngliche Gleichung, als auch der Werth ¹⁾ von (-100°) durch mich vollkommen selbständig bestimmt worden sind. Hierdurch ist der angeführte Satz des Hrn. Dühring: „Auch wird können“ als unrichtig dargelegt.

Wie aber, so frage ich mich vergeblich, kann Hr. Dühring einen solchen Satz mit einem solchen Vorwurf ohne Beweis schreiben? mit welchem Rechte schliesst Hr. Dühring, wenn er die Möglichkeit einer unberechtigten Aneignung einer von ihm gefundenen Sache gezeigt zu haben glaubt, auf die Wirklichkeit dieser Aneignung? Was würde er sagen, wenn man seinem Vater (Hrn. E. Dühring) den Vorwurf

1) Im Gegensatz zur Bestimmung derselben Grösse durch Hrn. Dühring ist zu erwähnen, dass er durch vergleichende Betrachtungen von Schwefel, Glycerin und Wasser zu dem Resultate gelangte, dass die „Verdampfungsgrenze“ des Wassers zwischen (-89°) und (-120°) liegen müsse, dann den Werth zu (-100°) angenommen und aus der guten Uebereinstimmung seiner sämtlichen Resultate auf die Richtigkeit dieses Werthes geschlossen hat; meine Bestimmung stützt sich hingegen nur auf Beobachtungen, die an dem Wasserdampfe gemacht sind.

machen wollte, dass, er sein im Jahre 1878 an Stelle des Mariotte'schen Gesetzes mitgetheiltes Gesetz von van der Waals oder von E. Budde entlehnt habe? und doch hat van der Waals bereits 1873 das Dühring'sche Gesetz aufgestellt und ist ein Auszug seiner Arbeit 1877 in dem ersten Hefte der Beiblätter erschienen; ebenso hat E. Budde¹⁾ das gleiche Gesetz schon im Jahre 1874 mitgetheilt.

Ich komme jetzt zu der Behauptung des Hrn. Dühring, dass die von mir aufgestellte Beziehung in ihrer erweiterten Form falsch sei. Dagegen werde ich den Beweis führen, dass diese Behauptung nur dann begründet sein würde, wenn die Spannungcurve des Wasserdampfes in niedrigen Drucken bis auf weniger als 0,02 mm vollkommen richtig wäre.

Während die ursprüngliche Form meiner Gleichung:

$$(I) \quad t_n = 200 n^{\log b} - 100$$

war, bei welcher t_n die Temperatur des gesättigten Wasserdampfes bei dem Drucke von n -Atmosphären bezeichnet, war die zweite Form die folgende:

$$(II) \quad t_n = 200 \cdot n^{\frac{d_n}{d} \cdot A} - 100.$$

In dieser Form bezeichnet d_n die Dichte des gesättigten Wasserdampfes bei dem Drucke von n -Atmosphären, bezogen auf Luft als Einheit,

d die constante Dichte des Wasserdampfes in überhitztem Zustande, ebenfalls bezogen auf Luft als Einheit,

A eine constante Zahl.

Da d_n mit abnehmendem Drucke abnimmt, so muss auch $\frac{d_n}{d}$ mit abnehmendem Drucke abnehmen und sich der Grenze 1 nähern. Für kleine Drücke (etwa unterhalb 20 mm) kann aber d_n so wenig von d verschieden sein, dass bei weiterer Druckabnahme der Exponent $\frac{d_n}{d} \cdot A$ als eine constante Grösse erscheint, indem die weitere Abnahme sich

1) Budde, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19. p. 286. 1874; Journal f. prakt. Chem. 9. p. 30. 1874.

in Decimalen ausspricht, die nicht mehr bestimmt werden; jedenfalls darf aber der Werth $\frac{d_n}{d} \cdot A$ nicht mit abnehmender Temperatur wachsen, sodass er bei einem bestimmten Druck ein Minimum wird. Dieses letztere behauptet Hr. Dühring, und zwar soll sich zwischen 20 und 30 mm ein solches Minimum zeigen. Wie klein dieses Minimum ist, und ob es sich nicht vielleicht durch sehr kleine Fehler in der Druckbestimmung erklären liesse, sodass bei nur äusserst wenig veränderten Drucken das Minimum verschwindet, darum kümmert sich Hr. Dühring nicht, sondern zieht den Schluss: „Die Winkelmann'sche Formel ist also mit den beobachteten Thatsachen nicht verträglich.“

Um diese Schlussfolgerung zu widerlegen und die völlige Grundlosigkeit derselben zu kennzeichnen, muss ich einige Tabellen mittheilen. Zunächst berechne ich aus der Formel:

$$(III) \quad t_n = 200 \cdot n^a - 100,$$

in welcher der Kürze halber $\frac{d_n}{d} A = a$ gesetzt ist, für die Temperaturen von 30° bis 0° , entsprechend dem Drucke von 31,548 mm bis 4,600 mm, von Grad zu Grad den Werth von a und gebe ihn als $\log a$ an.

Die Werthe von $\log a$ sind in der folgenden Tabelle doppelt berechnet, entsprechend den Drucken, welche von

Temperatur	log a nach		Temperatur	log a nach	
	Regnault	Magnus		Regnault	Magnus
30°	0,13159—1	0,13183—1	14°	0,13115—1	0,13092—1
29	151	174	13	118	089
28	143	164	12	123	088
27	137	157	11	130	088
26	130	149	10	137	095
25	125	143	9	143	088
24	121	134	8	154	091
23	115	127	7	161	091
22	111	120	6	174	095
21	111	116	5	186	097
20	109	111	4	199	103
19	107	106	3	234	107
18	108	104	2	230	112
17	107	098	1	247	122
16	109	096	0	264	124
15	111	097			

Regnault und Magnus bei den nebenstehenden Temperaturen angegeben sind.

Verfolgt man nun in obiger Tabelle den Werth von $\log a$ innerhalb der Drucke von 30 bis 20 mm, so sieht man, dass derselbe mit abnehmenden Drucke immer mehr abnimmt; bei weiterer Temperaturabnahme zeigt derselbe nach den Werthen von Regnault ein Minimum bei etwa 16 mm, nach den Werthen von Magnus aber erst später. Bedenkt man, dass die beiden Formeln für die Spannkraft des Dampfes von Regnault und Magnus vorzüglich übereinstimmende Resultate liefern, sodass bei der ganzen obigen Zusammenstellung unterhalb des Druckes von 30 mm die beiden Curven nirgends um 0,08 mm von einander abweichen, und vergleicht man dann die untere Hälfte der Werthe von $\log a$ in den beiden letzten Reihen der obigen Tabelle miteinander, so erkennt man, dass sehr geringe Druckunterschiede einen bedeutenden Einfluss auf $\log a$ ausüben müssen. Der letzte Werth von $\log a$ bei 0° ist nach dem Werthe 4,525 mm, welchen Magnus als Druck bei 0° setzt, gleich 0,13124—1; nimmt man statt des angegebenen Werthes den Druck gleich 4,505 mm, so erhält man für $\log a$ den Werth 0,13087—1, also kleiner als irgend einen der vorhergehenden Werthe.

Um aber am sichersten die Bedeutungslosigkeit der Behauptung des Hrn. Dühring zu zeigen, gebe ich in der folgenden Tabelle die Druckwerthe, welche mit einem constanten Werthe von a nach Formel III berechnet wurden, und zwar von 18° an, weil oberhalb 18° bereits eine Abnahme des Werthes von a mit abnehmender Temperatur constatirt ist. Lässt sich nachweisen, dass bei Annahme eines constanten Werthes von a die berechneten Werthe des Druckes mit den Beobachtungen genügend übereinstimmen, so ist damit jeder Forderung Genüge geleistet. In der Formel III ist für $\log a$ der constante Werth 0,13107—1 gesetzt; man erhält dann für den Druck des Dampfes folgende Werthe, denen die Werthe nach Magnus und Regnault beigegefügt sind.

Temp.	Druck des Dampfes in Millim.			Temp.	Druck des Dampfes in Millim.		
	nach Magnus	nach Form. III	nach Regnault		nach Magnus	nach Form. III	nach Regnault
18°	15,351	15,36	15,357	8°	7,964	7,977	8,017
17	14,409	14,42	14,421	7	7,436	7,449	7,492
16	13,519	13,53	13,536	6	6,939	6,947	6,998
15	12,677	12,69	12,699	5	6,471	6,476	6,534
14	11,882	11,90	11,908	4	6,032	6,034	6,097
13	11,130	11,15	11,162	3	5,619	5,620	5,687
12	10,421	10,44	10,457	2	5,231	5,228	5,302
11	9,751	9,768	9,792	1	4,867	4,861	4,940
10	9,126	9,137	9,165	0	4,525	4,516	4,600
9	8,525	8,541	8,574				

Die Drucke, welche nach Formel III mit dem constanten Werthe von a berechnet sind, liegen wie die obige Tabelle zeigt, für die Temperaturen von 18° bis 3° zwischen den Werthen von Magnus und Regnault; sie sind etwas kleiner als die Werthe von Regnault und etwas grösser als die Werthe von Magnus; den letzteren schliessen sie sich am nächsten an, sodass die Differenz nirgends 0,02 mm übersteigt. Für die drei niedrigsten Temperaturen von 2° bis 0° sind meine Formelwerthe auch etwas kleiner, als die Werthe von Magnus, die Differenz erreicht aber nicht einmal den Werth von 0,01 mm.

Was bleibt nun von dem Satze des Hrn. Dühring „die Winkelmann'sche Formel ist also mit den beobachteten That-sachen nicht verträglich“? Wie aus der dargelegten Tabelle hervorgeht, würde diese Schlussfolgerung nur dann richtig sein, wenn eine Abweichung von 0,02 mm Druck nicht gestattet wäre. Nur die früher bereits vorgeführte Auffassungsweise des Hrn. Dühring, welcher aus Drucken, die $\frac{1}{10}$ mm nicht überschreiten, Gesetze ableiten zu können glaubt, lässt es erklärlich finden, dass er Differenzen von 0,02 mm eine entscheidende Bedeutung beilegt, so entscheidend, dass er eine von mir aufgestellte Formel infolge dieser Differenzen für falsch erklärt.

In einem beachtenswerthen Gegensatze zu dieser Auffassung des Hrn. Dühring steht allerdings seine oben erwähnte Meinung, nach welcher bei hohen Drucken Differenzen von etwa 600 mm ohne Belang sind.

Nachdem im Vorhergehenden die beiden wesentlichsten Punkte der Dühring'schen Kritik zurückgewiesen sind, will ich noch zwei Bemerkungen hinzufügen. Hr. Dühring sagt, dass ich kein Experiment zur Sache gemacht und trotzdem die Interpolationsformeln von Regnault bemängelt habe; dagegen ist zu erwidern, dass bei der fraglichen Beurtheilung der Interpolationsformeln nur die bereits vorhandenen Experimente in Betracht kamen, da es sich darum handelte, zu untersuchen, ob die Formeln die Beobachtungen von Regnault selbst genügend darstellten.

Ferner spricht Hr. Dühring von einem Missverständniss, welches ich mir bezüglich einiger Bemerkungen, die von ihm und seinem Vater über unmittelbare Beobachtungen und Interpolationen gemacht seien, habe zu Schulden kommen lassen; dagegen muss ich hervorheben, dass meine Auffassung über Interpolationen etc. längst vor dem Erscheinen des Dühring'schen Werkes feststand und in keiner Weise durch dasselbe modificirt worden ist. Es kann daher schon aus diesem Grunde weder von einem Verständniss, noch von einem Missverständniss die Rede sein; zudem kommt aber noch, dass die fraglichen Bemerkungen mit meiner Arbeit in gar keinem Zusammenhange stehen.¹⁾

Hohenheim, October 1880.

1) Nachdem die betheiligten Herren ihren beiderseitigen Standpunkt in Betreff der Prioritätsfrage dargelegt haben, glaubt die Redaction die Polemik in dieser Beziehung als abgeschlossen betrachten zu dürfen.

G. W.